MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Matemática

> ENSINO MÉDIO

Área do conhecimento:
Matemática e suas Tecnologias

FUNÇÕES E PROGRESSÕES

CÓDIGO DA COLEÇÃO
0226P21202
CÓDIGO DO VOLUME
0226P21202134
PNLD 2021 • objeto 2 | Material de divulgação
Versão submetida à avaliação

MANUAL DO PROFESSOR

Bonjorno
Giovanni Jr.
Paulo Câmara

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

PRISMA

MANUAL DO PROFESSOR

José Roberto Bonjorno

- Licenciado em Pedagogia pela Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Professor Carlos Pasquale".
- Bacharel e licenciado em Física pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP).
- Professor de Matemática e Física em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1973.

José Ruy Giovanni Júnior

- Licenciado em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP).
- Professor e assessor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1985.

Paulo Roberto Câmara de Sousa

- Mestre em Educação pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB).
- Especialização em Educação Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE).
- Licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE).
- Professor de Matemática em escolas do Ensino Fundamental e Médio desde 1974.
- Professor de programas de formação continuada e pós-graduação desde 1990.
- Professor do Departamento de Matemática do Centro Acadêmico do Agreste – UFPE.

Matemática

Área do conhecimento: Matemática e suas Tecnologias

> ENSINO MÉDIO

FUNÇÕES E PROGRESSÕES

FTD

1ª edição
São Paulo – 2020

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Copyright © José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e
Paulo Roberto Câmara de Sousa, 2020

Direção-geral Ricardo Tavares de Oliveira

Direção editorial adjunta Luiz Tonolli

Gerência editorial Flávia Renata Pereira de Almeida Fugita

Edição Cibeli de Oliveira Chibante Bueno (coord.)

Alan Mazoni Alves, André Luiz Ramos de Oliveira, Bianca Cristina Fratelli, Carlos Eduardo Bayer Simões Esteves, Camila Silvestre, Cristina Silva dos Santos, João Alves de Souza Neto, Juliana Montagner, Lísias Cruz, Luciana Moura, Luís Felipe Porto Mendes, Marcos Antonio Silva, Teresa Christina Dias, Valéria Elvira Prete

Preparação e Revisão Maria Clara Paes (sup.)

Ana Lúcia P. Horn, Carolina Ramos Manley, Daniela Nanni, Danielle Costa, Desirée Araújo, Eliana Vila Nova de Souza, Jussara Rodrigues Gomes, Pedro Henrique Fandi, Priscilla Freitas, Yara Affonso

Gerência de produção e arte Ricardo Borges

Design Daniela Máximo (coord.), Sergio Cândido

Imagem de capa ARTSILENSE/Shutterstock.com

Arte e Produção Isabel Cristina Corandin Marques (sup.)

Adriana Maria Nery de Souza, Débora Jóia, Eduardo Benetorio, Gabriel Basaglia, Kleber Bellomo Cavalcante, Nadir Fernandes Racheti, Rodrigo Bastos Marchini, Maria Paula Santo Siqueira (assist.)

Diagramação VSA Produções

Coordenação de imagens e textos Elaine Bueno Koga

Licenciamento de textos Érica Brambila, Bárbara Clara (assist.)

Iconografia Priscilla Liberato Narciso, Ana Isabela Pithan Maraschin (trat. imagens)

Ilustrações Selma Caparroz

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Bonjorno, José Roberto
Prisma matemática : funções e progressões : ensino médio : área do conhecimento : matemática e suas tecnologias / José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior, Paulo Roberto Câmara de Sousa. – 1. ed. – São Paulo : Editora FTD, 2020.

Bibliografia.
ISBN 978-65-5742-018-8 (Aluno)
ISBN 978-65-5742-019-5 (Professor)

1. Matemática (ensino médio) I. Júnior, José Ruy Giovanni. II. Sousa, Paulo Roberto Câmara de. III. Título.
20-43446 CDD-510.7

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática : Ensino médio 510.7

Aline Graziele Benitez – Bibliotecária – CRB-1/3129

Em respeito ao meio ambiente, as folhas deste livro foram produzidas com fibras obtidas de árvores de florestas plantadas, com origem certificada.

Reprodução proibida: Art. 184 do Código Penal e Lei 9.610 de 19 de fevereiro de 1998. Todos os direitos reservados à

EDITORA FTD.
Rua Rui Barbosa, 156 – Bela Vista – São Paulo – SP
CEP 01326-010 – Tel. 0800 772 2300
Caixa Postal 65149 – CEP da Caixa Postal 01390-970
www.ftd.com.br
central.relacionamento@ftd.com.br

Impresso no Parque Gráfico da Editora FTD
CNPJ 61.186.490/0016-33
Avenida Antonio Bardella, 300
Guarulhos-SP – CEP 07220-020
Tel. (11) 3545-8600 e Fax (11) 2412-5375

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

APRESENTAÇÃO

Este livro tem o objetivo de estimular você a compreender a Matemática para utilizá-la em seu dia a dia e na continuação dos seus estudos. Além disso, busca favorecer o desenvolvimento de competências e habilidades que o auxiliem a ser um cidadão crítico, criativo, autônomo e responsável. Na sociedade contemporânea é muito importante que você seja capaz de ler a realidade, enfrentar novos desafios e tomar decisões éticas e fundamentadas.

Além dos conteúdos matemáticos específicos, o livro ainda traz possibilidades de explorar o uso de recursos tecnológicos, como *softwares* de geometria dinâmica e planilhas eletrônicas, e de refletir sobre as relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Desejamos que essa obra contribua para que você reflita e interfira na sociedade em que está inserido a partir de conhecimentos cientificamente fundamentados.

Bons estudos!

Os Autores

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CONHEÇA SEU LIVRO

Ícones das Atividades

CALCULADORA | ATIVIDADE EM GRUPO | ATIVIDADE EM DUPLA

CAPÍTULO 3

Função logarítmica

A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- Competências gerais da BNCC: 2, 7, 8, 9 e 10
- Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:
  - Competência específica 1: EM13MAT103
  - Competência específica 3: EM13MAT304 e EM13MAT305
  - Competência específica 4: EM13MAT403
- Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

O som do despertador, nossa música favorita, a água corrente de um rio, os gritos de um torcedor fanático, o canto dos passarinhos, o avião que passa pelo céu... Todos os sons que ouvimos podem ser medidos.

Fazer essa medição é importante, pois nossa orelha é composta de várias partes, algumas delas bastante sensíveis. Se estivermos expostos a ruídos altos por muito tempo, por exemplo, podemos sofrer com a perda auditiva. Por isso, aparelhos como aspiradores de pó, liquidificadores e outros devem passar por testes que identifiquem a intensidade do ruído que geram.

No caso dos fones de ouvido o cuidado deve ser maior. O recomendável é que a intensidade sonora não ultrapasse o nível de 80 decibéis (uma unidade de medida da intensidade sonora), que é equivalente a uma sala de aula muito barulhenta. Alguns aparelhos celulares até alertam o usuário, quando conecta fones de ouvido, para que não ultrapasse certo volume e evite danos auditivos. Portanto, procure não ouvir sua música favorita sempre no último volume, porque a perda de audição por ruídos é uma realidade que está atingindo cada vez mais jovens com maus hábitos auditivos.

Os shows musicais são eventos que costumam ter um alto nível de ruído.

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item. NÃO ESCREVA NO LIVRO
Ver as Orientações para o professor.

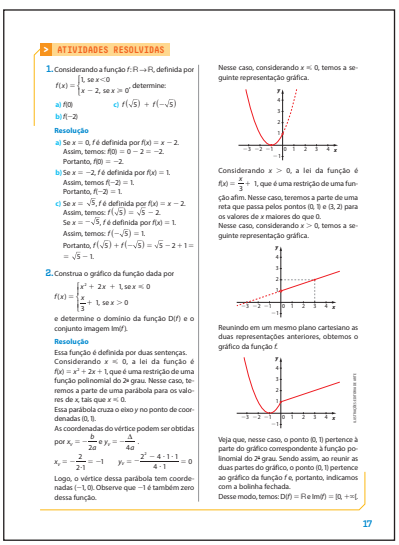
1. No texto foi mencionada uma unidade de medida chamada de **decibel (dB)**. Façam uma pesquisa sobre essa unidade. Como ela se relaciona ao conteúdo que será estudado neste Capítulo?
2. Muitos aparelhos domésticos devem passar por testes para determinar a intensidade sonora que geram e, no Brasil, recebem o Selo Ruído. Informem-se sobre esse selo e deem alguns exemplos de aparelhos e equipamentos que precisam ser testados quanto aos ruídos que produzem.
3. Por que fones de ouvido podem ser mais prejudiciais à saúde sonora do que alto-falantes como os da televisão? Pesquisem sobre isso e sobre a Perda Auditiva Induzida por Ruídos (PAIR), suas principais causas e o grupo de pessoas mais atingido por esse problema.

Existem quatro tipos de fones de ouvido: auriculares, intra-auriculares, supra-auriculares (fo e circumaural.

84

Abertura de Capítulo

Nas páginas de abertura você é convidado a observar textos e/ou imagens relacionados ao conteúdo do Capítulo e responder a questões que têm como objetivo proporcionar um momento de reflexão a respeito do contexto apresentado. Além disso, são apresentadas as competências gerais, competências específicas e habilidades da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) que se pretende desenvolver com o estudo do Capítulo.



ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$, determine:
   a) $f(0)$ c) $f(\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5})$
   b) $f(-2)$

Resolução

a) Se $x = 0$, f é definida por $f(x) = x - 2$.
Assim, temos: $f(0) = 0 - 2 = -2$.
Portanto, $f(0) = -2$.

b) Se $x = -2$, f é definida por $f(x) = 1$.
Assim, temos $f(-2) = 1$.
Portanto, $f(-2) = 1$.

c) Se $x = \sqrt{5}$, f é definida por $f(x) = x - 2$.
Assim, temos: $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$.
Se $x = -\sqrt{5}$, f é definida por $f(x) = 1$.
Assim, temos: $f(-\sqrt{5}) = 1$.
Portanto, $f(\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 + 1 = \sqrt{5} - 1$.

2. Construa o gráfico da função dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} + 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$ e determine o domínio da função $D(f)$ e o conjunto imagem $\text{Im}(f)$.

Resolução

Essa função é definida por duas sentenças. Considerando $x \leqslant 0$, a lei da função é $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que é uma restrição de uma função polinomial do 2º grau. Nesse caso, teremos a parte de uma parábola para os valores de x, tais que $x \leqslant 0$.
Essa parábola cruza o eixo y no ponto de coordenadas $(0, 1)$.
As coordenadas do vértice podem ser obtidas por $x_v = -\frac{b}{2a}$ e $y_v = -\frac{\Delta}{4a}$.

$x_v = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1 \quad y_v = -\frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 0$

Logo, o vértice dessa parábola tem coordenadas $(-1, 0)$. Observe que -1 é também zero dessa função.

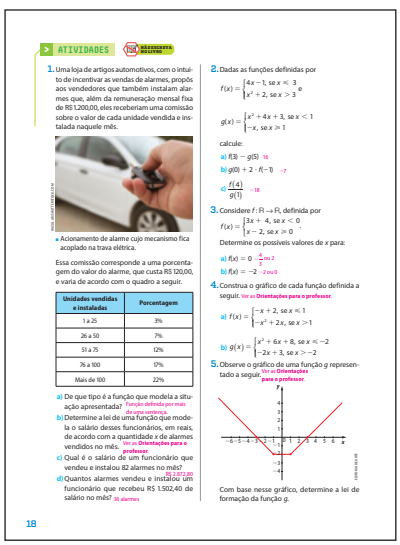
Nesse caso, considerando $x \leqslant 0$, temos a seguinte representação gráfica.

Considerando $x > 0$, a lei da função é $f(x) = \frac{x}{3} + 1$, que é uma restrição de uma função afim. Nesse caso, teremos a parte de uma reta que passa pelos pontos $(0, 1)$ e $(3, 2)$ para os valores de x maiores do que 0.
Nesse caso, considerando $x > 0$, temos a seguinte representação gráfica.

Reunindo em um mesmo plano cartesiano as duas representações anteriores, obtemos o gráfico da função f.

Veja que, nesse caso, o ponto $(0, 1)$ pertence à parte do gráfico correspondente à função polinomial do 2º grau. Sendo assim, ao reunir as duas partes do gráfico, o ponto $(0, 1)$ pertence ao gráfico da função f e, portanto, indicamos com a bolinha fechada.
Desse modo, temos: $D(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(f) = [0, +\infty[$.

17



ATIVIDADES NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Uma loja de artigos automotivos, com o intuito de incentivar as vendas de alarmes, propôs aos vendedores que também instalam alarmes que, além da remuneração mensal fixa de R$ 1.200,00, eles recebam uma comissão sobre o valor de cada unidade vendida e instalada naquele mês.

Acionamento de alarme cujo mecanismo fica acoplado na trava elétrica.

Essa comissão corresponde a uma porcentagem do valor do alarme, que custa R$ 120,00, e varia de acordo com o quadro a seguir.

Unidades vendidas e instaladas	Porcentagem
1 a 25	3%
26 a 50	7%
51 a 75	12%
76 a 100	17%
Mais de 100	22%

a) De que tipo é a função que modela a situação apresentada? Função definida por mais de uma sentença.
b) Determine a lei de uma função que modele o salário desses funcionários, em reais, de acordo com a quantidade x de alarmes vendidos no mês. Ver as Orientações para o professor.
c) Qual é o salário de um funcionário que vendeu e instalou 82 alarmes no mês? R$ 1.787,280
d) Quantos alarmes vendeu e instalou um funcionário que recebeu R$ 1.502,40 de salário no mês? 36 alarmes

2. Dadas as funções definidas por $f(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x^2 + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases}$ e $g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < 1 \\ -x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$, calcule:
   a) $f(3) - g(5)$ 16
   b) $g(0) + 2 \cdot f(-1)$ −7
   c) $\frac{f(4)}{g(1)}$ −18

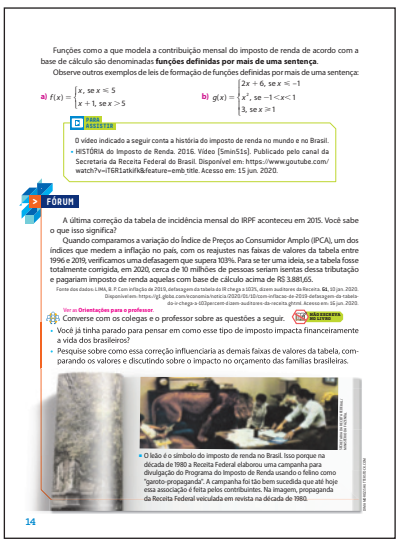
3. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 3x + 4, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$.
   Determine os possíveis valores de x para:
   a) $f(x) = 0$ $-\frac{4}{3}$ ou 2
   b) $f(x) = -2$ −2 ou 0

4. Construa o gráfico de cada função definida a seguir. Ver as Orientações para o professor.
   a) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$
   b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -2x + 3, \text{ se } x > -2 \end{cases}$

5. Observe o gráfico de uma função g representado a seguir. Ver as Orientações para o professor.

Com base nesse gráfico, determine a lei de formação da função g.

18



Funções como a que modela a contribuição mensal do imposto de renda de acordo com a base de cálculo são denominadas **funções definidas por mais de uma sentença.**
Observe outros exemplos de leis de formação de funções definidas por mais de uma sentença:

a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ x + 1, \text{ se } x > 5 \end{cases}$ b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x^2, \text{ se } -1 < x < 1 \\ 3, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

VOCÊ SABIA?

O vídeo indicado a seguir conta a história do imposto de renda no mundo e no Brasil.
- HISTÓRIA do Imposto de Renda. 2016. Vídeo (5min51s). Publicado pelo canal da Secretaria da Receita Federal do Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=tT6R1atkifk&feature=emb_title. Acesso em: 15 jun. 2020.

FÓRUM

A última correção da tabela de incidência mensal do IRPF aconteceu em 2015. Você sabe o que isso significa?
Quando comparamos a variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), um dos índices que medem a inflação no país, com os reajustes nas faixas de valores da tabela entre 1996 e 2019, verificamos uma defasagem que supera 103%. Para se ter uma ideia, se a tabela fosse totalmente corrigida, em 2020, cerca de 10 milhões de pessoas seriam isentas dessa tributação e pagariam imposto de renda aquelas com base de cálculo acima de R$ 3.881,65.

Fonte dos dados: LIMA, B. P. Com inflação de 2019, defasagem da tabela do IR chega a 103%, dizem auditores da Receita. G1, 10 jan. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2020/01/10/com-inflacao-de-2019-defasagem-da-tabela-do-ir-chega-a-103percent-dizem-auditores-da-receita.ghtml. Acesso em: 16 jun. 2020.

Ver as Orientações para o professor.
Converse com os colegas e o professor sobre as questões a seguir. VOCÊ ESCREVE NO LIVRO
- Você já tinha parado para pensar em como esse tipo de imposto impacta financeiramente a vida dos brasileiros?
- Pesquise sobre como essa correção influenciaria as demais faixas de valores da tabela, comparando os valores e discutindo sobre o impacto no orçamento das famílias brasileiras.

O leão é o símbolo do imposto de renda no Brasil. Isso porque na década de 1980 a Receita Federal elaborou uma campanha para divulgação do Programa do Imposto de Renda usando o felino como "garoto-propaganda". A campanha foi tão bem sucedida que até hoje essa associação é feita pelos contribuintes. Na imagem, propaganda da Receita Federal veiculada em revista na década de 1980.

14

Atividades resolvidas e Atividades

As atividades resolvidas apresentam uma forma organizada de resolução e deve ser um momento de reflexão e busca de outras formas de resolução. Já as atividades são variadas e visam a prática do conteúdo em estudo. Há também oportunidade de elaboração, análise de atividades e compartilhamento com seus colegas e o professor.

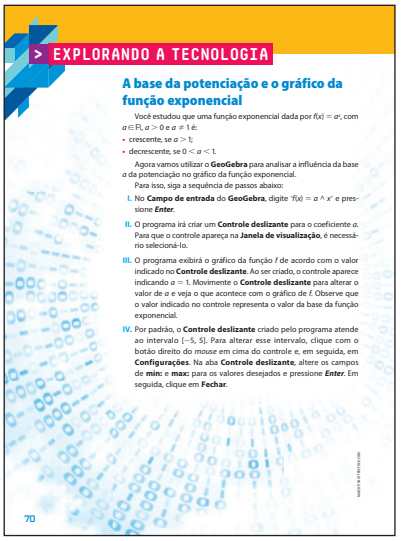
Fórum

É uma oportunidade de trocar e compartilhar ideias com seus colegas e o professor a partir de temas contemporâneos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

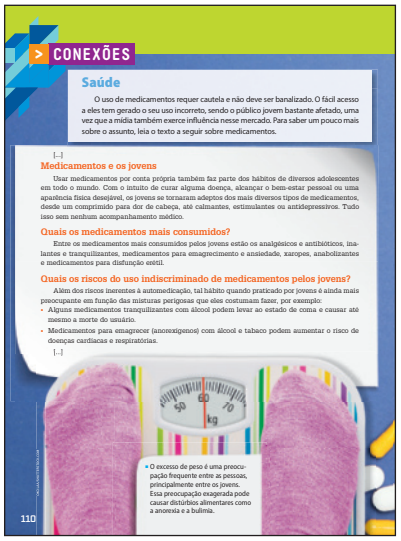
História da Matemática

Nesta seção você vai ter a oportunidade de ler textos de história da Matemática relacionados aos conteúdos que estão sendo estudados no Capítulo.



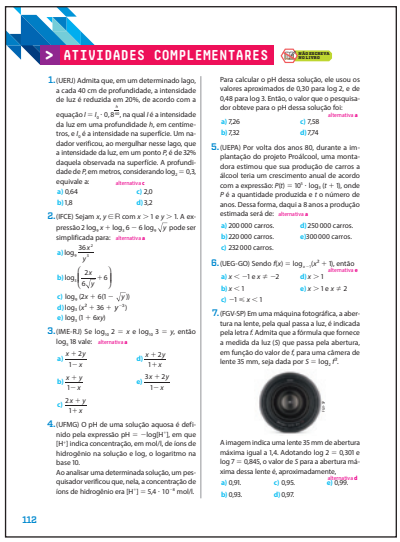
Explorando a tecnologia

Nesta seção você vai ter a oportunidade de aprofundar conhecimentos matemáticos e desenvolver o pensamento computacional, com ou sem o auxílio de tecnologias digitais.



Conexões

Nesta seção você vai explorar temas diversos relacionados ao conteúdo em estudo, com a finalidade de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico por meio de atividades investigativas, pesquisas e discussão com os colegas.



Atividades complementares

Nesta seção você vai encontrar questões de exames oficiais relacionadas aos conteúdos estudados. É uma oportunidade de você verificar seu conhecimento em relação ao que estudou no Capítulo.

Para refletir

Neste momento você vai ter a oportunidade de refletir sobre o que estudou em cada um dos capítulos e fazer uma autoavaliação de seu desempenho.

Glossário

Explicação de termos matemáticos ou da língua portuguesa.

Pense e responda

Momentos que valorizam, por meio de questões, sua participação na construção de seu conhecimento para que você interaja, investigue e reflita sobre o conteúdo em estudo.

Para ler • Para assistir Para acessar • Para ouvir

Sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. a fim de complementar o conteúdo do livro.

Saiba que...

Apresentação de uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo.

SUMÁRIO

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 1 **Função definida por mais de uma sentença** ... 10

» **Introdução** ... 12

» **Função definida por mais de uma sentença** ... 12
Domínio, contradomínio e conjunto imagem ... 15
Gráfico ... 15

Conexões • Consumo consciente de água ... 20

» **Funções sobrejetora, injetora e bijetora** ... 24
Função sobrejetora ... 24
Função injetora ... 24
Função bijetora ... 25

» **Função composta** ... 29

» **Função inversa** ... 31
Gráfico da função inversa ... 32

Explorando a tecnologia ... 36
• Conhecendo o GeoGebra ... 36
• Explorando função inversa com o GeoGebra ... 38

» **Módulo de um número real** ... 40
Distância entre dois pontos na reta real ... 42

» **Função modular** ... 42
Gráfico da função modular ... 42

» **Equações modulares** ... 44

Explorando a tecnologia ... 50
• Resolvendo equações modulares

Atividades complementares ... 52

Para refletir ... 53

CAPÍTULO 2 **Função exponencial** ... 54

» **Introdução** ... 56

» **Potenciação e radiciação** ... 57
Potência com expoente natural ... 57
Potência com expoente inteiro ... 57
Notação científica ... 58
Radiciação ... 59
Potência com expoente racional ... 60
Potência com expoente real ... 60

» **Função exponencial** ... 64
Gráfico da função exponencial ... 64
A função $f(x) = e^x$ ... 66

Explorando a tecnologia ... 70
• A base da potenciação e o gráfico da função exponencial

» **Equações exponenciais** ... 72

» **Inequações exponenciais** ... 72

Conexões • Radioatividade ... 74

Atividades complementares ... 81

Para refletir ... 83

MIKSER45/SHUTTERSTOCK.COM;
SEWCREAM/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 3 **Função logarítmica** 84

» **Introdução** 86
Logaritmo 86
Propriedades do logaritmo 87
Condições de existência do logaritmo 88
Propriedades operatórias dos logaritmos 91
Calculadora e logaritmos 94

História da Matemática 98
• A ideia de John Napier e o logaritmo

» **Função logarítmica** 99
Gráfico da função logarítmica 100
Relação entre função exponencial e função logarítmica 101

» **Equações logarítmicas** 103

» **Inequações logarítmicas** 103

Explorando a tecnologia 108
• Resolução de inequações logarítmicas com o GeoGebra

Conexões • Saúde 110

Atividades complementares 112

Para refletir 115

CAPÍTULO 4 **Progressões** 116

» **Introdução** 118

» **Sequências** 119
Sequências numéricas 119

» **Progressão aritmética** 123
Termo geral de uma PA 124
Soma dos termos de uma PA 126
Progressão aritmética e função afim 127

» **Progressão geométrica** 132
Termo geral de uma PG 133
Soma dos termos de uma PG finita 134
Soma dos termos de uma PG infinita 135
Progressão geométrica e função exponencial 136

Explorando a tecnologia 142
• Algoritmos e fluxogramas

Conexões 144
• Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo

História da Matemática 146
• Gauss e a soma de uma progressão aritmética

Atividades complementares 147

Para refletir 151

» **Respostas das Atividades** 152
» **Base Nacional Comum Curricular** 156
» **Bibliografia comentada** 158
» **Siglas de vestibulares** 160

Orientações para o professor 161

NESTE VOLUME

Os conteúdos desenvolvidos neste Volume buscam proporcionar que você, estudante, exercite sua curiosidade intelectual, investigando diversas situações de forma reflexiva e crítica, seja no contexto da própria Matemática, seja em outros contextos, interpretando dados para tomar decisões éticas e socialmente responsáveis.

O uso das tecnologias oferece recursos interativos que ampliam as possibilidades de estudo, permitindo melhor compreensão dos conceitos envolvidos, desenvolvem a autonomia e a curiosidade, contribuindo para que você seja protagonista de seu aprendizado.

Objetivos do Volume:

- Compreender e fazer uso de diferentes linguagens matemáticas (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar situações do dia a dia.
- Ser capaz de aplicar o conceito de função e de sequências na modelagem de situações em diversos contextos e identificar momentos em que a tecnologia pode ser uma aliada nesse processo.
- Interpretar e resolver problemas que envolvam funções definidas por mais de uma sentença, funções exponenciais e funções logarítmicas, identificando suas características e propriedades de modo a relacionar suas representações algébricas e gráficas.
- Identificar padrões e regularidades, investigar e propor conjecturas a respeito de conceitos e propriedades matemáticas, analisando o papel da demonstração de uma proposição.
- Refletir, discutir e argumentar sobre questões relacionadas ao meio ambiente, ao uso consciente de recursos naturais, à radioatividade e aos rejeitos radioativos, utilizando, para isso, a interpretação de dados, de fatos e o conhecimento científico.
- Refletir sobre aspectos relacionados à saúde física e emocional, como formas de prevenção e de controle de doenças, bem como ao consumo adequado de medicamentos, de modo a tomar decisões conscientes e responsáveis, com base na análise de dados.
- Estimular discussões justas e respeitosas, a fim de promover a socialização de ideias e o respeito ao outro e às diferenças.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Justificativas dos objetivos:

Por meio dos objetivos apresentados, pretende-se que você seja capaz de utilizar a linguagem matemática para se expressar, escolhendo a representação mais adequada para cada situação (algébrica, gráfica etc). Tal competência contribui para a formação de um cidadão capaz de ler, interpretar e comunicar informações em diversas áreas do conhecimento, em especial, utilizando a linguagem científica.

Além disso, as situações propostas visam contribuir com a sua capacidade de argumentação, sempre com base em fatos e dados para justificar suas escolhas e tomadas de decisão, de maneira ética e socialmente responsável.

O estudo de funções definidas por mais de uma sentença, funções exponenciais e funções logarítmicas permite que você possa modelar situações do cotidiano de modo a interpretá-las criticamente, estabelecer hipóteses, tomar decisões e construir argumentações consistentes.

Verificar regularidades e padrões em sequências numéricas favorece que você estabeleça relações entre progressões e funções para interpretar situações do cotidiano, além de permitir a compreensão de demonstrações matemáticas na validação de problemas científicos e do dia a dia de uma conjectura.

A análise e a reflexão de situações que envolvem temas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias, com base em textos de divulgação científica, dados e relações matemáticas, propiciam uma visão mais ampla dos temas, contribuindo para que você faça escolhas saudáveis e conscientes, visando o bem-estar físico e mental, de modo a trabalhar a autopercepção, o autocuidado, o cuidado com o outro e com o meio ambiente.

As atividades que propõem discussões coletivas contribuem para a socialização de ideias e a colaboração, mobilizam a descoberta e a pesquisa como estratégias de aprendizagem, estimulam o respeito às diferenças e desenvolvem a capacidade de argumentação e de tomada de decisões.

CAPÍTULO

1

Função definida por mais de uma sentença

> **A BNCC NESTE CAPÍTULO:**

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 2, 4, 7, 9 e 10
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1: EM13MAT101
  - Competência específica 3: EM13MAT302 e EM13MAT314
  - Competência específica 4: EM13MAT401 e EM13MAT404
  - Competência específica 5: EM13MAT510
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

O fim ou o começo do mês pode ser complicado para algumas famílias brasileiras, pois é quando grande parte das faturas são pagas. Associado a isso, às vezes surgem taxas ou tributos que influenciam no orçamento dessas pessoas.

O Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF), mais conhecido como imposto de renda, é um exemplo de cobrança que incide sobre a renda e os proventos de contribuintes que moram no Brasil ou no exterior e que recebem rendimentos de fontes no Brasil. O dinheiro arrecadado com esse imposto é revertido para a população em forma de serviços e programas sociais.

Esse imposto é cobrado segundo faixas de valor, de acordo com uma tabela progressiva, de modo que quem tem mais renda cede uma parcela maior para os cofres públicos. Em 2020, quem recebia mensalmente até R$ 1.903,98 era isento de pagar esse imposto sobre a renda.

Situações como essa vão nos auxiliar a compreender o estudo de **funções**, em particular as **funções definidas por mais de uma sentença**.

- É importante que a população cobre os governantes para que os valores dos impostos pagos pelo contribuinte sejam usados adequadamente.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Vocês costumam participar da organização e do planejamento dos gastos e das despesas de sua moradia? Consideram importante essa participação?

2. Vocês já tinham ouvido falar em imposto de renda? Sabiam que todas as pessoas não isentas devem fazer uma declaração anual de imposto de renda?

3. Vocês conhecem outro tipo de cobrança que é feita considerando faixas de consumo? Identificam a relação entre esse tipo de cobrança e o estudo de funções?

FOXAON1987/SHUTTERSTOCK.COM

MARCELLO RICARDO DAROS/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

O estudo de funções nos permite compreender algumas regularidades presentes em situações do dia a dia, bem como estabelecer modelos matemáticos que possibilitem analisar e prever resultados.

Na abertura deste Capítulo, vimos uma situação que podemos relacionar ao conceito de função definida por mais de uma sentença. Além desse conceito, estudaremos outros tipos de função, representação gráfica e conceitos matemáticos relacionados.

Ver as **Orientações para o professor**.

PENSE E RESPONDA

O imposto de renda é calculado em **função** da base de cálculo. O que a palavra destacada na frase anterior significa para você?

Função definida por mais de uma sentença

Vimos que o Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas (IRPF) é um imposto que incide sobre a renda adquirida de fontes no Brasil por contribuintes residentes no país ou no exterior. Esse tributo é cobrado de acordo com uma tabela progressiva, indicando a alíquota correspondente a cada base de cálculo, que dependa da renda de cada contribuinte.

Observe a seguir a tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2020.

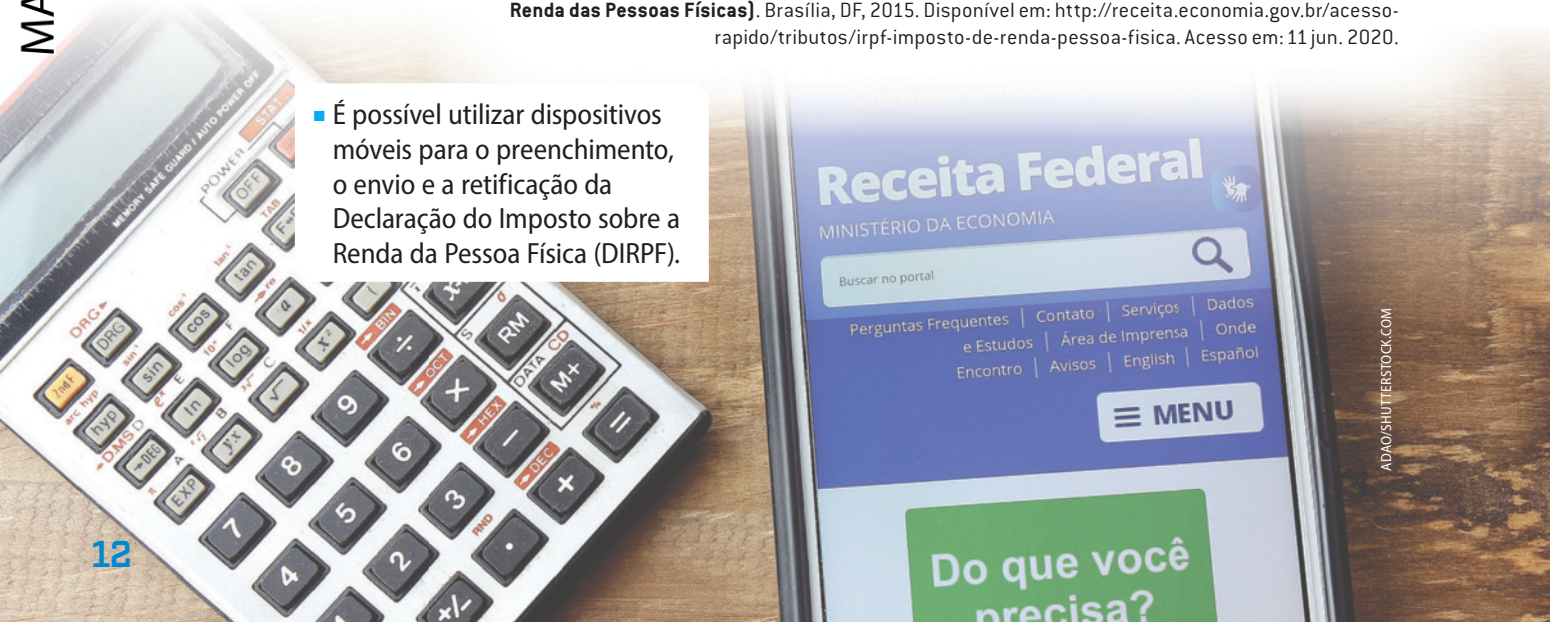
> Tabela de incidência mensal vigente em 2020

Base de cálculo (R$)	Alíquota (%)	Parcela a deduzir do IRPF (R$)
Até 1.903,98	–	–
De 1.903,99 até 2.826,65	7,5	142,80
De 2.826,66 até 3.751,05	15	354,80
De 3.751,06 até 4.664,68	22,5	636,13
Acima de 4.664,68	27,5	869,36

Fonte: BRASIL. Ministério da Economia. Secretaria da Receita Federal do Brasil. **IRPF (Imposto sobre a Renda das Pessoas Físicas)**. Brasília, DF, 2015. Disponível em: http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 11 jun. 2020.

SAIBA QUE...

Alíquota é o percentual aplicado sobre a base de cálculo para determinar o valor de um tributo.



ADAO/SHUTTERSTOCK.COM

- É possível utilizar dispositivos móveis para o preenchimento, o envio e a retificação da Declaração do Imposto sobre a Renda da Pessoa Física (DIRPF).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Com base nessa tabela, podemos calcular, por exemplo, o imposto que incide sobre a renda de um trabalhador que teve como base de cálculo mensal o valor de R$ 3.350,00. Nesse caso, devemos aplicar a alíquota de 15% sobre a base de cálculo e deduzir R$ 354,80 desse valor. Observe:

$$\text{R\$ } 3.350{,}00 \cdot 15\% - \text{R\$ } 354{,}80 = \text{R\$ } 502{,}50 - \text{R\$ } 354{,}80 = \text{R\$ } 147{,}70$$

Logo, o imposto de renda que incide sobre uma base de cálculo de R$ 3.350,00 mensais é de R$ 147,70.

Dizemos que a contribuição mensal do imposto de renda, em reais, é uma **função** da base de cálculo, também expressa em reais, pois cada valor da base de cálculo corresponde a um único valor de contribuição mensal do imposto de renda. A base de cálculo é a **variável independente** e a contribuição mensal do imposto de renda é a **variável dependente**.

Leia a seguir a definição matemática de função.

> Dados dois conjuntos não vazios, A e B, uma **função** de A em B é uma relação que associa **cada** elemento x de A a um **único** elemento y de B.

Para indicar uma função de A em B, podemos escrever $f: A \to B$ (lê-se: f de A em B). A função f transforma x de A em y de B, o que pode ser escrito como $y = f(x)$ (lê-se: y é igual a f de x).

Na situação que estamos estudando, os valores correspondentes à base de cálculo podem ser considerados elementos do conjunto A e os valores de contribuição mensal de imposto de renda, como elementos do conjunto B.

Com base na tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2020, considerando x os valores correspondentes à base de cálculo e $f(x)$ a contribuição mensal do imposto de renda, podemos escrever uma **lei de formação** para representar essa função. Observe:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \leqslant 1903{,}98 \\ 0{,}075x - 142{,}80, \text{ se } 1903{,}99 \leqslant x \leqslant 2826{,}65 \\ 0{,}15x - 354{,}80, \text{ se } 2826{,}66 \leqslant x \leqslant 3751{,}05 \\ 0{,}225x - 636{,}13, \text{ se } 3751{,}06 \leqslant x \leqslant 4664{,}68 \\ 0{,}275x - 869{,}36, \text{ se } x > 4664{,}68 \end{cases}$$

Cédulas e moedas do real.

PENSE E RESPONDA

Que sentença corresponde a quem é isento de pagar a contribuição mensal de imposto de renda?

$f(x) = 0$, se $x \leqslant 1903{,}68$.

Se necessário, auxiliar os estudantes a escrever a sentença solicitada nesse questionamento e registrar as demais sentenças considerando cada faixa da tabela.

Funções como a que modela a contribuição mensal do imposto de renda de acordo com a base de cálculo são denominadas **funções definidas por mais de uma sentença**.

Observe outros exemplos de leis de formação de funções definidas por mais de uma sentença:

a) $f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \leqslant 5 \\ x + 1, \text{ se } x > 5 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x + 6, \text{ se } x \leqslant -1 \\ x^2, \text{ se } -1 < x < 1 \\ 3, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$

PARA ASSISTIR

O vídeo indicado a seguir conta a história do imposto de renda no mundo e no Brasil.

- HISTÓRIA do Imposto de Renda. 2016. Vídeo (5min51s). Publicado pelo canal da Secretaria da Receita Federal do Brasil. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=iT6R1atkifk&feature=emb_title. Acesso em: 15 jun. 2020.

FÓRUM

A última correção da tabela de incidência mensal do IRPF aconteceu em 2015. Você sabe o que isso significa?

Quando comparamos a variação do Índice de Preços ao Consumidor Amplo (IPCA), um dos índices que medem a inflação no país, com os reajustes nas faixas de valores da tabela entre 1996 e 2019, verificamos uma defasagem que supera 103%. Para se ter uma ideia, se a tabela fosse totalmente corrigida, em 2020, cerca de 10 milhões de pessoas seriam isentas dessa tributação e pagariam imposto de renda aquelas com base de cálculo acima de R$ 3.881,65.

Fonte dos dados: LIMA, B. P. Com inflação de 2019, defasagem da tabela do IR chega a 103%, dizem auditores da Receita. **G1**, 10 jan. 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/economia/noticia/2020/01/10/com-inflacao-de-2019-defasagem-da-tabela-do-ir-chega-a-103percent-dizem-auditores-da-receita.ghtml. Acesso em: 16 jun. 2020.

Ver as **Orientações para o professor**.

Converse com os colegas e o professor sobre as questões a seguir. **NÃO ESCREVA NO LIVRO**

- Você já tinha parado para pensar em como esse tipo de imposto impacta financeiramente a vida dos brasileiros?
- Pesquise sobre como essa correção influenciaria as demais faixas de valores da tabela, comparando os valores e discutindo sobre o impacto no orçamento das famílias brasileiras.

SECRETARIA DA RECEITA FEDERAL/MINISTÉRIO DA FAZENDA.

O leão é o símbolo do imposto de renda no Brasil. Isso porque na década de 1980 a Receita Federal elaborou uma campanha para divulgação do Programa do Imposto de Renda usando o felino como "garoto-propaganda". A campanha foi tão bem sucedida que até hoje essa associação é feita pelos contribuintes. Na imagem, propaganda da Receita Federal veiculada em revista na década de 1980.

DIMA MOROZ/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Domínio, contradomínio e conjunto imagem

Considerando uma função $f: A \to B$, vimos que a função f transforma $x \in A$ em $y \in B$.

Dizemos que o conjunto A é o **domínio** da função, indicado por **D(*f*)** e o conjunto B é o **contradomínio** da função, indicado por **CD(*f*)**.

Cada elemento x do domínio tem um correspondente y no contradomínio, indicado por $y = f(x)$. A esse valor de y damos o nome de **imagem** de x pela função f. O conjunto de todos os valores de y pertencentes a CD(f), que são imagens de x pela função, é chamado **conjunto imagem** da função, indicado por **Im(*f*)**.

Quando temos uma **função real de variável real**, o domínio e o contradomínio dessa função são subconjuntos de $\mathbb{R}$ (conjunto dos números reais). Uma forma de indicar esse tipo de função é $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Gráfico

Para construir o gráfico de uma função definida por mais de uma sentença, devemos fazê-lo por partes, considerando a lei de formação que determina cada uma das partes da função.

Por exemplo, vamos construir o gráfico da função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} x + 3, \text{ se } x \leqslant 2 & \text{(I)} \\ x - 1, \text{ se } 2 < x \leqslant 5 & \text{(II)} \\ 6, \text{ se } x > 5 & \text{(III)} \end{cases}$$

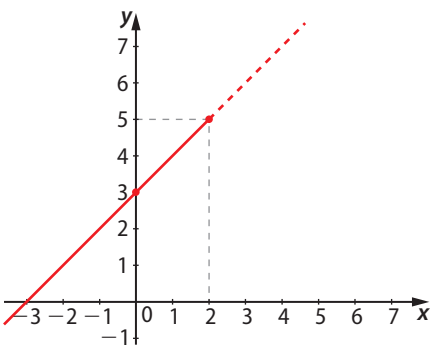
Vamos construir separadamente o gráfico correspondente a cada sentença da função e depois reunir essas representações no mesmo plano cartesiano.

I. Considerando a sentença $g_1(x) = x + 3$, se $x \leqslant 2$.

O gráfico correspondente é o gráfico da função afim definida por $y = x + 3$, em que $x \in]-\infty, 2]$. Nesse caso, escolhemos dois valores de $x \in]-\infty, 2]$ e determinamos dois pontos pertencentes à reta correspondente a esse gráfico.

x	$y = x + 3$	(x, y)
0	$y = 0 + 3 = 3$	(0, 3)
2	$y = 2 + 3 = 5$	(2, 5)

Destacar para os estudantes que o gráfico da função afim é uma reta e que para obter essa representação podemos localizar no plano cartesiano dois pontos pertencentes a esse gráfico e traçar a reta que passa por eles.



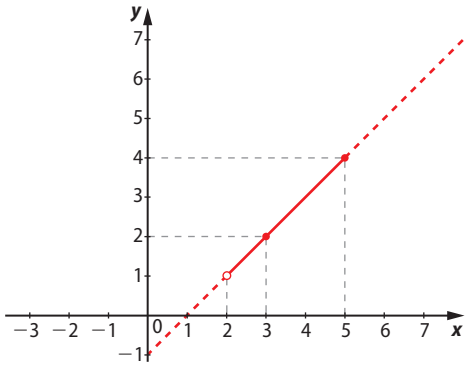
EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

II. Considerando a sentença $g_2(x) = x - 1$ se $2 < x \leqslant 5$.

O gráfico correspondente é o gráfico da função afim definida por $y = x - 1$, em que $x \in]2, 5]$. Nesse caso, escolhemos dois valores de $x \in]2, 5]$ e determinamos dois pontos pertencentes à reta correspondente a esse gráfico.

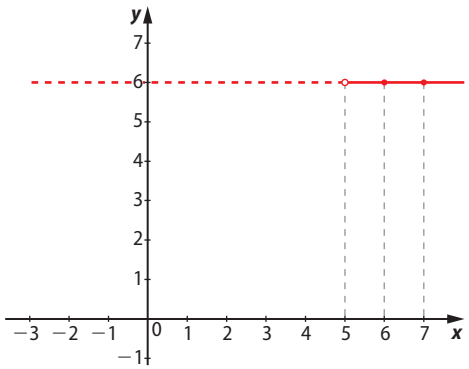
x	$y = x - 1$	(x, y)
3	$y = 3 - 1 = 2$	(3, 2)
5	$y = 5 - 1 = 4$	(5, 4)



III. Considerando a sentença $g_3(x) = 6$, se $x > 5$.

O gráfico correspondente é o gráfico da função afim definida por $y = 6$, em que $x \in]5, +\infty[$, também conhecida como função constante. Esse gráfico é uma reta paralela ao eixo das abscissas.

x	$y = 6$	(x, y)
6	$y = 6$	(6, 6)
7	$y = 6$	(7, 6)

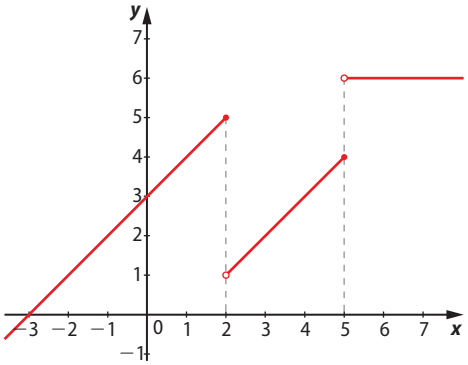


Logo, para representar o gráfico da função g, reunimos em um mesmo plano cartesiano as representações obtidas anteriormente.

PENSE E RESPONDA

O intervalo real]5, 6] não é um subconjunto de Im(g). Como podemos justificar essa afirmação?

Ver as **Orientações para o professor**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Auxiliar os estudantes a identificar o conjunto imagem da função g com base no eixo y do plano cartesiano e a interpretar a notação $\{6\} \cup]-\infty, 5]$.

Na prática, podemos fazer esboços de cada parte com fio tracejado e só depois traçar o gráfico final. Observe que um valor de $x \in D(g)$ tem uma única imagem $y = g(x)$. Indicamos isso no gráfico utilizando bolinha aberta e bolinha fechada.

Nesse exemplo, temos $D(g) = \mathbb{R}$, $CD(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{6\} \cup]-\infty, 5]$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}$, determine:

a) $f(0)$ **c)** $f(\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5})$

b) $f(-2)$

Resolução

a) Se $x = 0$, f é definida por $f(x) = x - 2$.
Assim, temos: $f(0) = 0 - 2 = -2$.
Portanto, $f(0) = -2$.

b) Se $x = -2$, f é definida por $f(x) = 1$.
Assim, temos $f(-2) = 1$.
Portanto, $f(-2) = 1$.

c) Se $x = \sqrt{5}$, f é definida por $f(x) = x - 2$.
Assim, temos: $f(\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2$.
Se $x = -\sqrt{5}$, f é definida por $f(x) = 1$.
Assim, temos: $f(-\sqrt{5}) = 1$.
Portanto, $f(\sqrt{5}) + f(-\sqrt{5}) = \sqrt{5} - 2 + 1 = \sqrt{5} - 1$.

2. Construa o gráfico da função dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1, \text{ se } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{3} + 1, \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

e determine o domínio da função D(f) e o conjunto imagem Im(f).

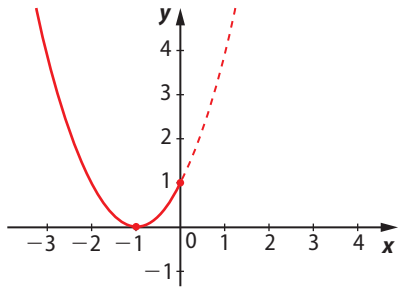
Resolução

Essa função é definida por duas sentenças.
Considerando $x \leqslant 0$, a lei da função é $f(x) = x^2 + 2x + 1$, que é uma restrição de uma função polinomial do 2º grau. Nesse caso, teremos a parte de uma parábola para os valores de x, tais que $x \leqslant 0$.
Essa parábola cruza o eixo y no ponto de coordenadas (0, 1).
As coordenadas do vértice podem ser obtidas por $x_V = -\frac{b}{2a}$ e $y_V = -\frac{\Delta}{4a}$.

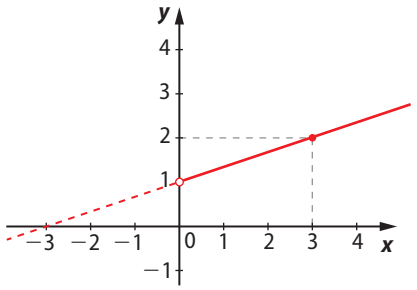
$x_V = -\frac{2}{2 \cdot 1} = -1$ $\quad y_V = -\frac{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}{4 \cdot 1} = 0$

Logo, o vértice dessa parábola tem coordenadas (−1, 0). Observe que −1 é também zero dessa função.

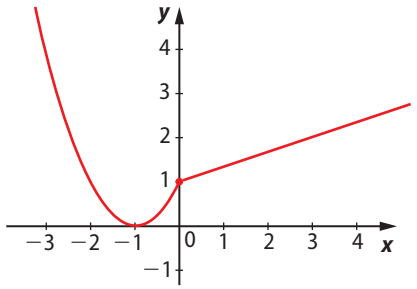
Nesse caso, considerando $x \leqslant 0$, temos a seguinte representação gráfica.



Considerando $x > 0$, a lei da função é $f(x) = \frac{x}{3} + 1$, que é uma restrição de uma função afim. Nesse caso, teremos a parte de uma reta que passa pelos pontos (0, 1) e (3, 2) para os valores de x maiores do que 0.
Nesse caso, considerando $x > 0$, temos a seguinte representação gráfica.



Reunindo em um mesmo plano cartesiano as duas representações anteriores, obtemos o gráfico da função f.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Veja que, nesse caso, o ponto (0, 1) pertence à parte do gráfico correspondente à função polinomial do 2º grau. Sendo assim, ao reunir as duas partes do gráfico, o ponto (0, 1) pertence ao gráfico da função f e, portanto, indicamos com a bolinha fechada.
Desse modo, temos: D(f) = $\mathbb{R}$ e Im(f) = [0, +∞[.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Uma loja de artigos automotivos, com o intuito de incentivar as vendas de alarmes, propôs aos vendedores que também instalam alarmes que, além da remuneração mensal fixa de R$ 1.200,00, eles receberiam uma comissão sobre o valor de cada unidade vendida e instalada naquele mês.

HAZAL AK/SHUTTERSTOCK.COM

▪ Acionamento de alarme cujo mecanismo fica acoplado na trava elétrica.

Essa comissão corresponde a uma porcentagem do valor do alarme, que custa R$ 120,00, e varia de acordo com o quadro a seguir.

Unidades vendidas e instaladas	Porcentagem
1 a 25	3%
26 a 50	7%
51 a 75	12%
76 a 100	17%
Mais de 100	22%

a) De que tipo é a função que modela a situação apresentada? Função definida por mais de uma sentença.

b) Determine a lei de uma função que modela o salário desses funcionários, em reais, de acordo com a quantidade x de alarmes vendidos no mês. Ver as **Orientações para o professor**.

c) Qual é o salário de um funcionário que vendeu e instalou 82 alarmes no mês? R$ 2.872,80

d) Quantos alarmes vendeu e instalou um funcionário que recebeu R$ 1.502,40 de salário no mês? 36 alarmes

2. Dadas as funções definidas por

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 1, \text{ se } x \leqslant 3 \\ x^2 + 2, \text{ se } x > 3 \end{cases} \text{ e}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3, \text{ se } x < 1 \\ -x, \text{ se } x \geqslant 1 \end{cases}$$

calcule:

a) $f(3) - g(5)$ 16

b) $g(0) + 2 \cdot f(-1)$ -7

c) $\dfrac{f(4)}{g(1)}$ -18

3. Considere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 4, \text{ se } x < 0 \\ x - 2, \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Determine os possíveis valores de x para:

a) $f(x) = 0$ $-\frac{4}{3}$ ou 2

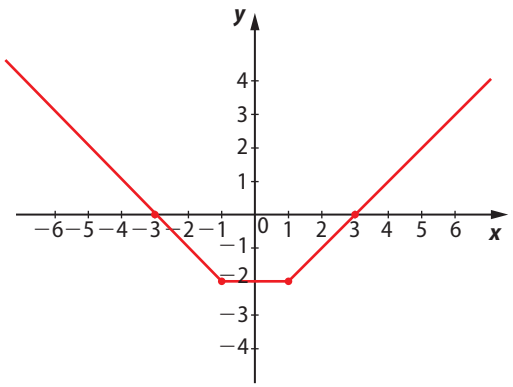
b) $f(x) = -2$ -2 ou 0

4. Construa o gráfico de cada função definida a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = \begin{cases} -x + 2, \text{ se } x \leqslant 1 \\ -x^2 + 2x, \text{ se } x > 1 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x^2 + 6x + 8, \text{ se } x \leqslant -2 \\ -2x + 3, \text{ se } x > -2 \end{cases}$

5. Observe o gráfico de uma função g representado a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.



EDITORIA DE ARTE

Com base nesse gráfico, determine a lei de formação da função g.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. Em alguns municípios brasileiros, a população tem a possibilidade de utilizar gás natural encanado em suas residências. Esse serviço é oferecido por companhias de distribuição e uma das vantagens é o fornecimento contínuo do combustível.

BENEDEK ALPAR/SHUTTERSTOCK.COM

- Distribuição de gás natural. Esse combustível pode ser utilizado em aquecedores e fogões, desde que observadas as especificações técnicas desses equipamentos.

Uma concessionária estabelece o valor a ser pago pelo consumo de gás considerando um valor, fixado por faixa de consumo, adicionado a um valor variável que depende da quantidade consumida, em metro cúbico. Observe a seguir os valores aproximados das cinco primeiras faixas de consumo praticados por essa concessionária. Nesses valores já estão considerados PIS/Cofins, mas não está considerado o ICMS.

> Tarifa de gás natural para consumo residencial (a partir de 31/08/2020)

Consumo (m^3)	Valor fixado (R$ por mês)	Valor variável (R$ por m^3)
0 a 1	7,75	1,25
1,01 a 3	10,13	6,38
3,01 a 7	10,13	2,85
7,01 a 14	11,40	5,39
14,01 a 34	12,67	6,59

Fonte dos dados: COMGAS. **Tarifas do gás natural canalizado**. São Paulo, 2020. Disponível em: https://www.comgas.com.br/tarifas/residencial/. Acesso em: 7 set. 2020.

Assim, por exemplo, se em uma residência o consumo foi de 6,5 m^3, essa concessionária vai cobrar:

- o valor fixado (R$ por mês): R$ 10,13 (corresponde à 3ª faixa de consumo);
- 1 m^3 tarifado na 1ª faixa de consumo: $1 \cdot 1{,}25 = 1{,}25$, ou seja, R$ 1,25;
- 2 m^3 tarifados na 2ª faixa de consumo: $2 \cdot 6{,}38 = 12{,}76$, ou seja, R$ 12,76;
- 3,5 m^3 tarifados na 3ª faixa de consumo: $3{,}5 \cdot 2{,}85 = 9{,}975$, ou seja, R$ 9,97.

Adicionando esses valores, obtemos R$ 34,11, que é o valor a ser pago por 6,5 m^3 de gás natural considerando essa concessionária. Lembre-se de que esse valor não considera o ICMS.

Fonte dos dados: COMGÁS. Simule sua conta. São Paulo, 2020. Disponível em: https://www.comgas.com.br/para-a-sua-casa/entenda-sua-conta/. Acesso em: 16 jun. 2020.

Ver as **Orientações para o professor**.

Reúna-se a dois colegas e, com base nessas informações, façam o que se pede a seguir.

a) Vocês já conheciam como é cobrado o gás natural consumido em residências?

b) Pesquisem o significado das siglas PIS, Cofins e ICMS e procurem saber mais sobre esses tributos.

c) Com base nessa tabela e considerando x o consumo, em metro cúbico, e $f(x)$ o valor correspondente a ser pago, em reais, escrevam uma lei de formação que pode ser utilizada para modelar essa situação.

d) Se vocês recebem esse tipo de combustível em sua residência, verifiquem o consumo, em metro cúbico, no último mês e utilizem a lei obtida para calcular quanto pagariam à concessionária da situação apresentada nesta atividade. Caso não usem esse combustível, façam uma estimativa de consumo e determinem o valor correspondente.

Os valores reais foram aproximados considerando duas casas decimais para facilitar os cálculos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Consumo consciente de água

A água é um recurso natural indispensável à vida, utilizada na agricultura, para a higiene pessoal, na limpeza de ambientes, na geração de energia elétrica, entre outros. O uso irresponsável desse recurso tanto na agricultura como nas residências e nas indústrias causa problemas que ameaçam o fornecimento de água para a população.

Veja a seguir mais informações sobre a distribuição e o consumo de água.

[...]

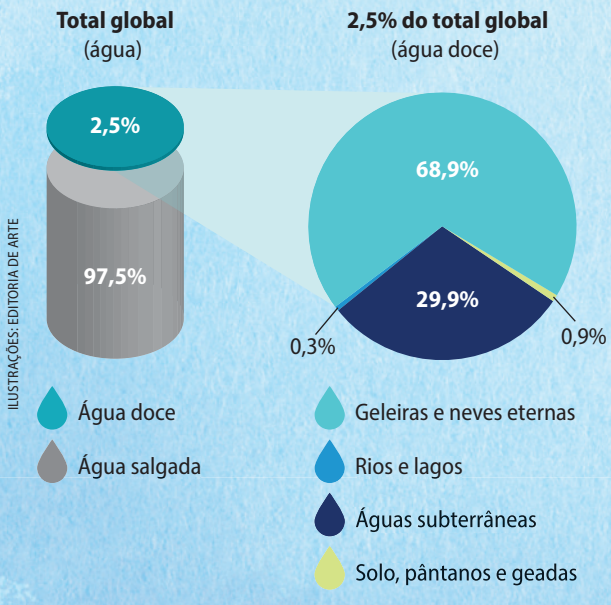
A água doce não está distribuída uniformemente pelo globo. Sua distribuição depende essencialmente dos ecossistemas que compõem o território de cada país. Segundo o Programa Hidrológico Internacional da Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (Unesco), na América do Sul encontra-se 26% do total de água doce disponível no planeta e apenas 6% da população mundial, enquanto o continente asiático possui 36% do total de água e abriga 60% da população mundial.

[...]

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Água**. Brasília, DF. Disponível em: https://www.mma.gov.br/estruturas/secex_consumo/_arquivos/3%20-%20mcs_agua.pdf. Acesso em: 17 jun. 2020.

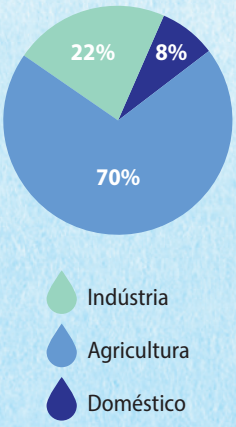
PATTERN IMAGE/SHUTTERSTOCK.COM, SEWCREAM/SHUTTERSTOCK.COM, KANOKPOLTOKUMHNERD/SHUTTERSTOCK.COM, CGTERMINAL/SHUTTERSTOCK.COM

> Distribuição de água no mundo



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

> Consumo de água no mundo



Fonte dos dados: BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Água**. Brasília, DF. Disponível em: https://www.mma.gov.br/estruturas/secex_consumo/_arquivos/3%20-%20mcs_agua.pdf. Acesso em: 17 jun. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Brasileiro consome, em média, 154 litros de água por dia, aponta ONU

Segundo o Sistema Nacional de Informações sobre Saneamento, do Ministério das Cidades, cada brasileiro consome, em média, 154 litros de água todos os dias. O número, que a princípio pode parecer baixo, ultrapassa os 110 litros necessários, alerta a Organização das Nações Unidas (ONU).

[...]

BRASILEIRO consome, em média, 154 litros de água por dia, aponta ONU. **Confederação Nacional de Municípios**, 12 mar. 2018. Disponível em: https://www.cnm.org.br/comunicacao/noticias/brasileiro-consome-em-media-154-litros-de-agua-por-dia-aponta-onu. Acesso em: 17 jun. 2020.

Veja a seguir algumas dicas para reduzir o consumo de água em algumas situações no dia a dia.

[...]

Banho de ducha por 15 minutos, com o registro meio aberto, consome 135 litros de água. Se você fechar o registro ao se ensaboar, e reduzir o tempo do banho para 5 minutos, seu consumo cai para 45 litros. [...]

No caso de banho com chuveiro elétrico, também em 15 minutos e com o registro meio aberto, são gastos 45 litros e 15 litros, respectivamente. [...]

[...]

Se uma pessoa escova os dentes em 5 minutos com a torneira não muito aberta, gasta 12 litros de água. No entanto, se molhar a escova e fechar a torneira enquanto escova os dentes e, ainda, enxaguar a boca com um copo de água, consegue economizar mais de 11,5 litros de água.

[...]

Ao lavar o rosto em 1 minuto, com a torneira meio aberta, uma pessoa gasta 2,5 litros de água. A dica é não demorar!

O mesmo vale para o barbear: em 5 minutos gastam-se 12 litros de água. Com economia, o consumo cai para 2 a 3 litros. [...]

[...]

DICAS e testes. **Sabesp**. Disponível em: http://site.sabesp.com.br/site/interna/Default.aspx?secaoId=184. Acesso em: 17 jun. 2020.

BBERNARD/SHUTTERSTOCK.COM

Fechar a torneira enquanto escovamos os dentes é uma forma de economizar água.

ALENA IVOCHKINA/SHUTTERSTOCK.COM

Ao lavar o rosto, devemos ficar atentos para não abrir demais a torneira.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No município onde você mora há cobrança mensal de consumo de água? Você compreende os dados apresentados na conta de água?

Observe a seguir parte de uma conta de água e algumas informações destacadas.

I. Dados do cadastro (do cliente e da ligação)
A conta de água pode ser utilizada como comprovante de residência. Neste local da fatura, é possível verificar esses dados, além de verificar o mês de referência.

II. Leitura e consumo
Aqui o cliente tem a indicação das datas em que as leituras são realizadas, a leitura obtida no hidrômetro e a quantidade consumida, em metro cúbico, naquele mês. Além disso, é possível observar um gráfico representando o consumo dos seis meses anteriores.

III. Cálculo do valor da conta
É explicitado nesta parte da conta, de forma detalhada, por faixa de valor, o cálculo do consumo de água e o cálculo da tarifa de esgoto.

IV. Discriminação do faturamento
São explicitados aqui os valores que estão sendo cobrados, bem como o total a pagar e a data de vencimento da fatura.

V. Avisos ao cliente
São apresentadas mensagens ao cliente e indicados os tributos cobrados na fatura.

Conta Mensal de Serviços de Água e/ou Esgotos CNPJ 43.776.517/0001-80
companhia de saneamento básico do estado de são paulo - sabesp

RGI	Nº da Conta	GR	CR	Mês de Referência
01234567/89	1384054674101	06		OUTUBRO/13

End.: Av. Engenheiro Caetano Alvares, 5000 — Folha 1 de 1
Itaquera São Paulo/SP CEP 01110-021
Cliente: Pedro de Alcântara Francisco Antônio Carlos — Código do Cliente: 0002053827
Cod. Sabesp: 13.057.042.0270.9099.0999.0001 — Aposentado
Economias: 0001 Res + 0001 Com + 0000 Ind + 0000 Pub — Tipo de Ligação: Agua e Esgoto
Tipo de Faturamento: Comum — Hidrômetro: Y11L123456
Procure seu atendimento para renovar seu benefício

Apresentação	Data	Leitura	Consumo m³
Leitura Atual	01/11/13	263	17
Leitura Anterior	15/07/12	246	
Próxima Leitura	16/09/12		

Período de Consumo: 31 dias
Condição da Leitura: LEITURA NORMAL

Histórico do Consumo de Água

ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET
17	18	19	17	11	21
R	R	R	I	M	M

Média: 17 Ajuste: 1,033

Facilite nossos serviços, de condicoes para leitura

Cálculo do Valor da Conta Residencial Por Economia

Faixa Consumo (m³)	Consumo (m³) por Economia	Água Tarifa (R$)	Água Valor (R$)	Esgoto Tarifa (R$)	Esgoto Valor (R$)
até 10	Mínimo	16,31	16,31	16,31	16,31
11 a 20	7	2,55	17,85	2,55	17,85
21 a 31		6,37		6,37	
31 a 50		6,37		6,37	
acima de 51		7,02		7,02	
Subtotal			34,16		34,16

VI Agua (Agua x Ft. de Ajust x Econ) 34,16 x 1,000 x 1 = 34,16
VI Esgoto (Esgoto x Ft. de Ajust x Econ) 34,16 x 1,000 x 1 = 34,16
Total Residencial (VI Água + VI Esgoto) = 68,32

SABESP/REPRODUÇÃO

Discriminação do Faturamento

Item	Valor (R$)
Água	34,16
Esgoto	34,16
Multa*	0,75
At. Monetária*	0,06
Juros de Mora*	0,33
Total a Pagar	69,48

Total a Pagar: R$********69,46
Vencimento: 13/11/13
Débito Automático: Banco 000 Agência 0000
Considerar esta fatura quitada quando efetuado débito automático. Se por algum motivo de seu conhecimento não ocorrer o débito automático, pague esta conta em qualquer agente autorizado.
No caso de atraso no pagamento - Será acrescida de multa de 2%, mais atualização monetária com base na variação do IPCA/IBGE do mês anterior, mais juros de mora de 0,033% ao dia. A conta não paga até a data de vencimento sujeita o imóvel ao corte do fornecimento de água.
Oferecemos datas opcionais de vencimento para sua conta 99 - 99 - 99 - 99 - 99 - 99. Havendo interesse entre em contato com a SABESP.
* Multa/At. Monetária/Juros de Mora referente ao pagamento de mês(es) anteriores após o vencimento.
Economizar água é eshanjar inteligência

Avisos ao Cliente
SABESP - PREMIO NACIONAL DA QUALIDADE EM SANEAMENTO. SABESP E SAUDE
Até 28/10/13 nao acusamos o pagamento de 02 contas de meses anteriores.

Tributos	Alíquota(%)	Base de Cálculo (R$)	Valor(R$)
PIS/PASEP e COFINS	7,30	69,07	5,04

Fonte dos dados: A CONTA mudou: mais moderna e de fácil entendimento. **Sabesp**, 13 dez. 2013. Disponível em: http://site.sabesp.com.br/site/imprensa/noticias-detalhe.aspx?secaoId=65&id=5996. Acesso em: 17 jun. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na tabela a seguir, são apresentados os valores cobrados de acordo com o consumo de água no município de São Paulo (SP), segundo a tarifa residencial comum em 2020.

> **Tarifa residencial comum – abastecimento de água e coleta de esgoto (a partir de 11 de maio de 2019)**

Classe de consumo (m^3 por mês)	Tarifa de água (em R$)	Tarifa de esgoto (em R$)
0 a 10	26,18 por mês	26,18 por mês
11 a 20	4,10 por m^3	4,10 por m^3
21 a 30	10,23 por m^3	10,23 por m^3
31 a 50	10,23 por m^3	10,23 por m^3
acima de 50	11,27 por m^3	11,27 por m^3

Fonte: CONHEÇA as nossas tarifas. **Sabesp**, 11 maio 2019. Disponível em: https://www9.sabesp.com.br/agenciavirtual/pages/tarifas/tarifas.iface. Acesso em: 17 jun. 2020.

Veja como calcular, por exemplo, o valor pago considerando um consumo mensal de 22 m^3 de água nesse município em 2020 (cada resultado é multiplicado por dois em razão da coleta de esgoto):

- 10 m^3 são tarifados na 1ª classe: $26{,}18 \cdot 2 = 52{,}36$;
- 10 m^3 são tarifados na 2ª classe: $(4{,}10 \cdot 10) \cdot 2 = 82{,}00$;
- 2 m^3 são tarifados na 3ª classe: $(10{,}23 \cdot 2) \cdot 2 = 40{,}92$.

Adicionando esses valores, verificamos que, na situação considerada, R$ 175,28 era o valor pago por 22 m^3 de consumo de água.

Agora, reúna-se a dois colegas e façam o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Com base nas informações apresentadas nesta seção, conversem sobre a importância da preservação da água. Pesquisem mais alternativas que podem ser adotadas para redução de consumo de água e elaborem um panfleto para divulgar essas informações na escola.
2. Com base na tabela desta página, considerem x o consumo de água, em metro cúbico, e $f(x)$ o valor a ser pago, em reais, pelo fornecimento de água e coleta de esgoto para escrever uma lei de formação que relacione esses valores.
3. Caso haja cobrança mensal de água no município onde moram, pesquisem sobre essas tarifas e verifiquem se a coleta de esgoto também é tarifada, além de outros serviços públicos. Verifiquem a possibilidade de estender a pesquisa para conseguir essa informação sobre municípios vizinhos, com o objetivo de fazer uma comparação.

Incentivar os estudantes a procurar na internet tabelas de valores, de outros municípios e fazer a comparação dos valores, levantando hipóteses sobre o motivo de ser uma tarifa variável de acordo com o município.

Ver as **Orientações para o professor**.

PARA ASSISTIR

WATERWORLD: o segredo das águas. Direção: Kevin Reynolds. EUA: Universal Pictures, 1995. DVD (135 min).

O filme se passa em um futuro em que não há terra sólida no planeta Terra em razão do derretimento das calotas polares. Os personagens saem em busca de um suposto local com terra firme.

CGTERMINAL/SHUTTERSTOCK.COM

Funções sobrejetora, injetora e bijetora

Vamos estudar agora quando uma função é sobrejetora (ou sobrejetiva), injetora (ou injetiva) e bijetora (ou bijetiva). Com esse estudo, pretendemos facilitar a compreensão do conceito de função inversa, que será explorado mais à frente.

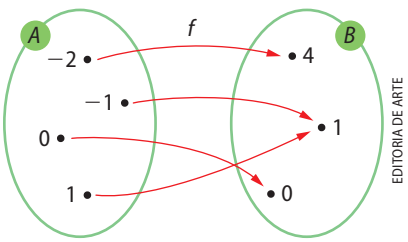
Função sobrejetora

Uma função $f: A \to B$ é **sobrejetora** (ou sobrejetiva) quando, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Em outras palavras, uma função f é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio da função.

Por exemplo:

a) Considere a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x^2$, representada por meio do diagrama ao lado.



EDITORIA DE ARTE

A função f **é sobrejetora**, pois todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A.

b) Considere agora a função $g: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, definida por $g(x) = 2x + 3$. Observe alguns valores assumidos pela função g.

$$x = 0 \Rightarrow g(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$
$$x = 1 \Rightarrow g(1) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$
$$x = 2 \Rightarrow g(2) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

PENSE E RESPONDA

Por que o conjunto imagem da função g tem apenas números ímpares?

Ver as **Orientações para o professor**.

Existem números naturais que não são imagem de nenhum elemento do domínio da função g. Nesse caso, a função g **não é sobrejetora**.

Na verdade, basta que haja pelo menos um elemento do contradomínio que não seja imagem de algum elemento do domínio da função para que ela não seja sobrejetora.

Função injetora

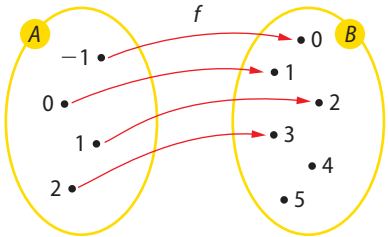
Uma função $f: A \to B$ é **injetora** (ou injetiva) quando, para quaisquer x_1, $x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em outras palavras, uma função f é injetora quando **não existe** elemento do contradomínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio da função.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Por exemplo:

a) Considere a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = x + 1$, representada por meio do diagrama a seguir.



A função f **é injetora**, pois elementos distintos de A são associados pela função a elementos distintos de B.

b) Considere agora a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x^2 + 1$ e observe o cálculo de dois valores assumidos por essa função.

$$g(1) = 1^2 + 1 \Rightarrow g(1) = 2$$
$$g(-1) = (-1)^2 + 1 \Rightarrow g(-1) = 2$$

Veja que o número 2, pertencente ao contradomínio da função, é imagem de dois elementos distintos do domínio (1 e -1). Nesse caso, a função g **não é injetora**.

PENSE E RESPONDA

Observe o diagrama que representa a função f nesta página. Quais elementos deveriam pertencer ao conjunto A para que a função f fosse injetora e sobrejetora ao mesmo tempo? Explique sua resposta.

Ver as **Orientações para o professor**.

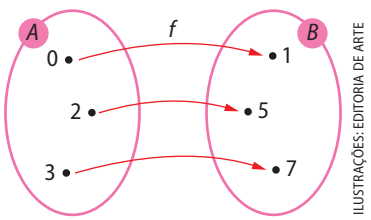
Função bijetora

Uma função $f: A \to B$ é **bijetora** (ou bijetiva) quando é sobrejetora e injetora simultaneamente.

Quando $f: A \to B$ é uma função bijetora, dizemos que há uma **bijeção** entre A e B, ou, ainda, uma **correspondência biunívoca** entre A e B.

Por exemplo:

a) Considere a função $f: A \to B$, definida por $f(x) = 2x + 1$, representada por meio do diagrama a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Com base nessa representação, temos:

- a função f **é sobrejetora**, pois todo elemento de B é imagem de pelo menos um elemento de A;
- a função f **é injetora**, pois elementos distintos de A são associados por f a elementos distintos de B.

Portanto, a função f **é bijetora**, ou seja, temos uma **correspondência biunívoca** entre A e B.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

b) Considere agora a função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x^2$.

- a função g **não é sobrejetora**, pois existe pelo menos um elemento no contradomínio que não é imagem de nenhum elemento do domínio da função g. Por exemplo, o número -1 (não há número real x, tal que $x^2 = -1$);
- a função g **não é injetora**, pois existem elementos distintos do domínio de g que têm imagens iguais por essa função. Por exemplo: $g(-2) = g(2) = 4$.

Portanto, a função g **não é bijetora**.

Outra maneira de reconhecer uma função bijetora é por meio do gráfico que a representa. Para isso, traçamos retas paralelas ao eixo x, que passam por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, verificando se elas intersectam esse gráfico. Caso isso aconteça, observamos **quantos pontos** de intersecção existem.

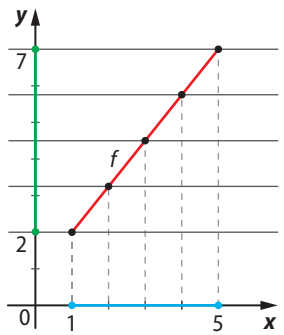
Observe alguns exemplos:

a) A função $f: A \to B$, em que $A = [1, 5]$ e $B = [2, 7]$, representada no gráfico a seguir. Veja que o domínio D(f) foi destacado em azul e o contradomínio CD(f), em verde.

PENSE E RESPONDA

Observe o gráfico da função f e explique por que essa função é injetora e sobrejetora.

Ver as **Orientações para o professor**.



Nesse exemplo, cada uma das retas paralelas ao eixo x, que passam por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, intersecta o gráfico em **um único** ponto.

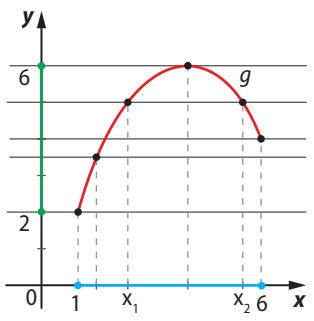
Nesse caso, a função f é **bijetora**.

b) A função $g: A \to B$, em que $A = [1, 6]$ e $B = [2, 6]$, representada no gráfico a seguir. Veja que o domínio D(f) foi destacado em azul e o contradomínio CD(f), em verde.

PENSE E RESPONDA

Observe o gráfico da função g e explique por que essa função não é injetora.

Ver as **Orientações para o professor**.



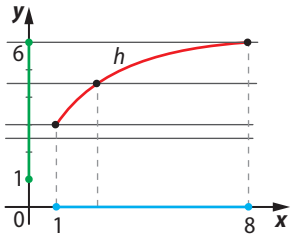
Nesse exemplo, cada uma das retas paralelas ao eixo x, que passam por pontos de ordenadas pertencentes ao contradomínio da função, intersecta o gráfico. Entretanto, pelo menos uma dessas retas intersecta o gráfico em **mais de um** ponto.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Nesse caso, a função g é **sobrejetora**, mas não é injetora. Portanto, a função g **não é bijetora**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) A função $h: A \to B$, em que $A = [1, 8]$ e $B = [1, 6]$, representada no gráfico a seguir. Veja que o domínio D(f) foi destacado em azul e o contradomínio CD(f), em verde.



Nesse exemplo, existe pelo menos uma reta paralela ao eixo x, passando por um ponto de ordenada pertencente ao contradomínio da função, que **não intersecta** o gráfico.

PENSE E RESPONDA

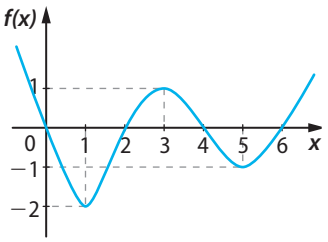
Observe o gráfico da função h e responda: essa função é injetora? Por quê?

Ver as **Orientações para o professor**.

Nesse caso, a função h não é sobrejetora. Portanto, **não é bijetora**.

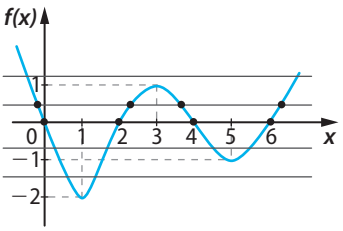
> ATIVIDADES RESOLVIDAS

3. Observe o gráfico de uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e verifique se essa função é injetora.



Resolução

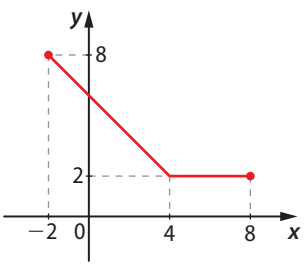
Traçando retas paralelas ao eixo x que passam pelos pontos pertencentes ao contradomínio da função, temos:



Veja que a função f não é injetora, pois há pelo menos uma reta paralela ao eixo x, que passa por um ponto de ordenada pertencente ao contradomínio da função, cruzando o gráfico de f em **mais de um** ponto.

Isso significa que, para diferentes valores de $x \in D(f)$, temos imagens iguais. Por exemplo: $f(0) = f(2) = f(4) = f(6) = 0$

4. Verifique se o gráfico da função $g: [-2, 8] \to [0, 8]$ a seguir representa uma função bijetora.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Resolução

A função g não é sobrejetora, pois há pelo menos um elemento do contradomínio de g que não é imagem de nenhum elemento do domínio de g pela função. Por exemplo, não existe $x \in D(g)$, tal que $g(x) = 1$ e $1 \in CD(g)$. Portanto, a função g não é bijetora.

Veja também que essa função não é injetora, pois elementos distintos do domínio, por exemplo, 4 e 8, são associados, pela função, à mesma imagem.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

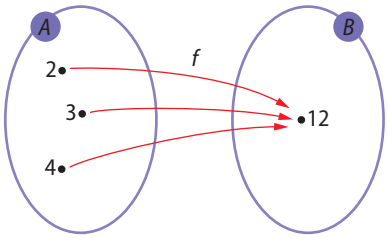
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

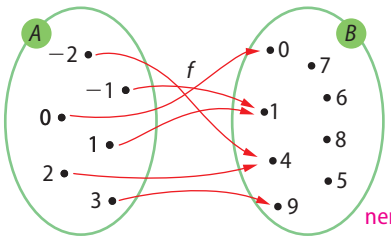
7. Verifique se a função $f: A \to B$, representada em cada diagrama a seguir, é bijetora, apenas sobrejetora, apenas injetora ou nenhuma dessas classificações.

a)



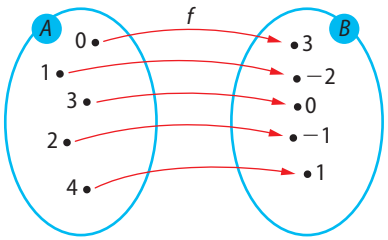
apenas sobrejetora

b)



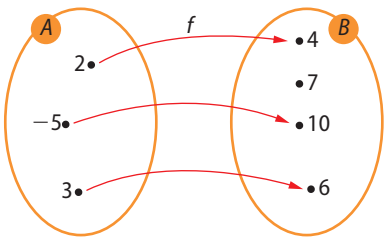
nem sobrejetora nem injetora

c)



bijetora

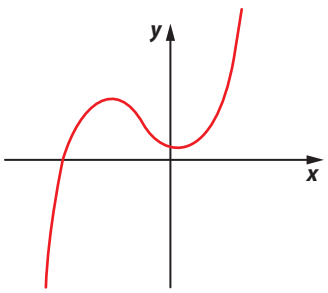
d)



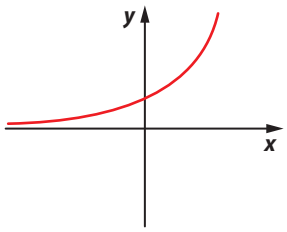
apenas injetora

8. Considerando os gráficos a seguir, indique aquele que representa uma função bijetora, sabendo que o domínio é $\mathbb{R}$ e o contradomínio é $\mathbb{R}$ também. alternativa **d**

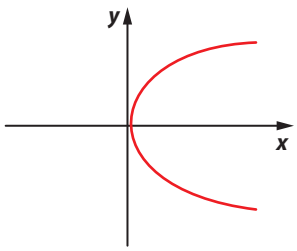
a)



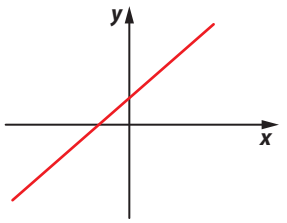
b)



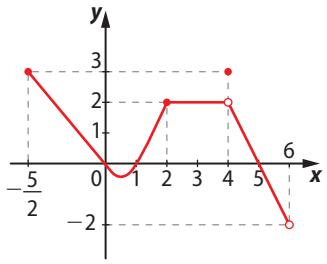
c)



d)



9. (UFMT) A figura a seguir representa o gráfico de uma função $y = f(x)$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A partir das informações contidas no gráfico, indique **V** para as afirmativas verdadeiras e **F** para as falsas.

- f é uma função injetora.
- O domínio de f é o intervalo $]-2; 3]$.
- $f(x) = 2$, para todo $2 \leqslant x \leqslant 4$.
- $f(x) \geqslant 0$, para $\forall\, x \in \left[-\frac{5}{2}; 0\right] \cup [1; 5]$.

A sequência correta é: alternativa **a**

a) F, F, F, V.

b) F, V, V, F.

c) V, F, V, V.

d) V, V, V, F.

e) F, V, F, F.

Função composta

Acompanhe a situação a seguir.

Em uma fábrica de calçados, o lucro L obtido com a venda de cada par é função do preço V, de venda de cada par para os varejistas. Essa função é expressa por $L = 0{,}4 \cdot V$. Por sua vez, o preço V, de venda de cada par, é função do valor P, gasto com a matéria-prima necessária para produzir o par, e é expresso por $V = 20 + 2P$.

Nesse caso, sabendo que o lucro L é dado em função do preço V que, por sua vez, é dado em função do valor gasto em matéria-prima P, como seria possível determinar o lucro L com base no valor gasto em matéria-prima P?

Observe como podemos fazer isso utilizando uma composição entre as duas funções. Temos as seguintes leis:

$$L = 0{,}4 \cdot V \ (\text{I}) \quad \text{e} \quad V = 20 + 2P \ (\text{II})$$

Substituindo (II) em (I), obtemos:

$$L = 0{,}4 \cdot (20 + 2P) \Rightarrow L = 8 + 0{,}8P$$

Com isso, a função dada por $L = 8 + 0{,}8P$ relaciona diretamente o lucro L, obtido com a venda de cada par de calçados, e o valor P, gasto com a matéria-prima necessária para produzir cada par.

Nessa situação, observamos que a variável L (lucro) é função da variável V (preço de venda), que, por sua vez, é função de uma terceira variável P (valor da matéria-prima).

Essas cadeias de dependência podem ser matematicamente modeladas pela composição de funções.

PANPOTE/SHUTTERSTOCK.COM

■ Uma das preocupações da indústria de calçados é a sustentabilidade, que preza por aspectos como a origem da matéria-prima, os resíduos da produção e a durabilidade do produto.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

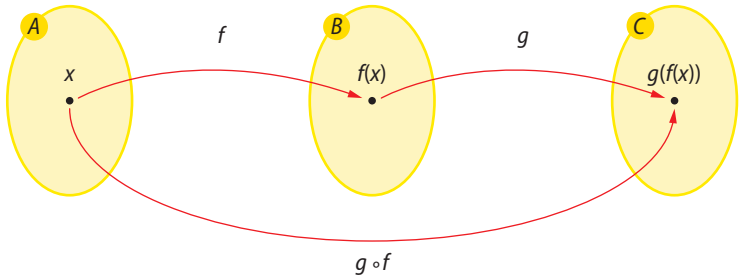
Acompanhe a definição matemática de função composta e observe o diagrama a seguir, que representa esse conceito.

Dadas as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$, chamamos de **função composta de *g* com *f*** a função $g \circ f: A \to C$, tal que $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ para $\forall\, x \in A$.

Lê-se: *g* composta com *f*.

$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall\, x \in A$

Lê-se: *g* de *f* de *x*.



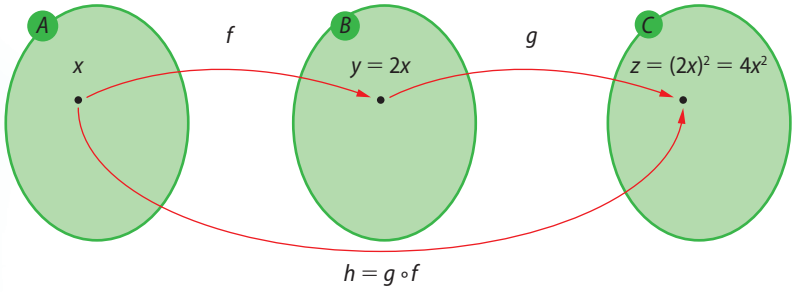
Considere, por exemplo, as funções *f* e *g*, definidas por:

- $f: A \to B$, que a cada $x \in A$ associa um único valor de $y \in B$, tal que $y = 2x$;
- $g: B \to C$, que a cada $y \in B$ associa um único $z \in C$, tal que $z = y^2$.

Para obter a lei de uma terceira função $h: A \to C$, que a cada $x \in A$ associa um único valor de $z \in C$, dada pela composição $g \circ f$, fazemos:

$$z = y^2 = (2x)^2 = 4x^2$$

Assim, a lei da função composta $g \circ f$ é dada por $g \circ f(x) = g(f(x)) = 4x^2$. Observe como podemos usar um diagrama para representá-la.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

PENSE E RESPONDA

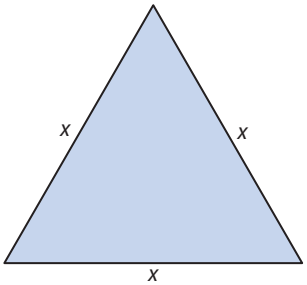
Suponha $g: A \to B$, que a cada $x \in A$ associa um único valor de $y \in B$, tal que $y = x^2$, e $f: B \to C$, que a cada $y \in B$ associa um único valor de $z \in C$, tal que $z = 2y$. Qual é a lei da função composta $f \circ g$? Essa lei é igual à da função *h* do exemplo apresentado?

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 2x^2$; não.

PIXELDREAMS.EU/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Função inversa

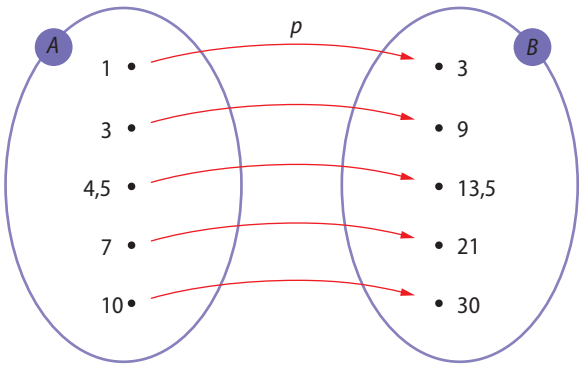


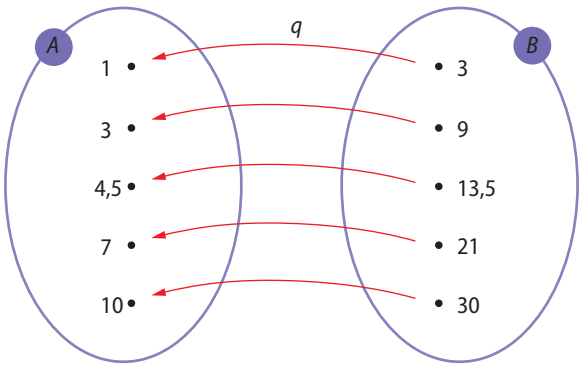
Ao considerarmos um triângulo equilátero, podemos relacionar o perímetro desse triângulo e a medida dos lados por meio de uma função.

PENSE E RESPONDA

- Escreva a lei da função, considerando a medida do lado a variável independente e o perímetro, a variável dependente.
- É possível definir a função "inversa" dessa, ou seja, considerando o perímetro como a variável independente e a medida do lado como a variável dependente? Escreva essa lei.
- O que você observa quando compara as funções definidas nos itens anteriores? Justifique. Ver as **Orientações para o professor**.

Considerando x a medida do lado do triângulo e y o perímetro, podemos representar essa situação por uma função bijetora $p: A \to B$, dada por $p(x) = 3x$ e por uma função bijetora $q: B \to A$, expressa por $q(y) = \frac{y}{3}$. Escolhendo alguns valores numéricos, representamos os diagramas a seguir.





ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Quando observamos situações como essa, dizemos que uma função é **inversa** da outra.

Veja a seguir como podemos definir matematicamente a função inversa.

Dada uma função bijetora $f: A \to B$, denomina-se **função inversa** de f a função $g: B \to A$, tal que se $f(a) = b$, então $g(b) = a$ para todo $a \in A$ e $b \in B$.

A função g pode ser indicada por f^{-1} (lemos: função inversa de f).

SAIBA QUE...

O número -1 na notação f^{-1} não é um expoente, ou seja, $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Podemos também definir a função inversa, de modo equivalente, utilizando o conceito de função composta.

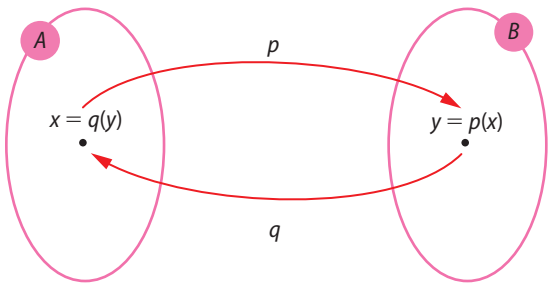
A função $g: B \to A$ é a **inversa** da função bijetora $f: A \to B$, quando $g(f(x)) = x$ e $f(g(y)) = y$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.

Retomando o exemplo envolvendo as funções p e q apresentadas, temos:

- uma função bijetora $p: A \to B$, dada por $p(x) = 3x$;
- uma função bijetora $q: B \to A$, dada por $q(y) = \frac{y}{3}$.

SAIBA QUE...

Uma função f só admite função inversa f^{-1} se for bijetora. Quando isso acontece, dizemos que a função f é **invertível**.



EDITORIA DE ARTE

Quando determinamos $q(p(x))$ e $p(q(y))$, obtemos, respectivamente:

$$q(p(x)) = \frac{p(x)}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

$$p(q(y)) = 3 \cdot q(y) = 3 \cdot \frac{y}{3} = y$$

Gráfico da função inversa

Considere a função $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ invertível, dada por $f(x) = 3x$, e a função inversa de f, $f^{-1}: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definida por $f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$.

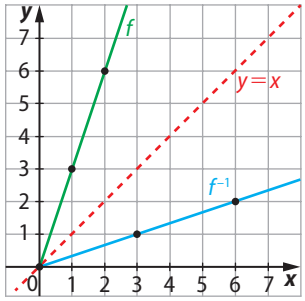
Como o gráfico de f e o de f^{-1} são retas, atribuímos alguns valores para x e obtemos os pares ordenados de alguns pontos para traçar a reta correspondente à cada função.

x	$y = f(x)$
0	0
1	3
2	6

x	$y = f^{-1}(x)$
0	0
3	1
6	2

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Traçando o gráfico de f e o de f^{-1} no mesmo sistema de coordenadas, obtemos:



EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE...

Um ponto de coordenadas (x, y) e um ponto de coordenadas (y, x) são simétricos em relação à reta que contém a abscissa dos quadrantes ímpares.

Observe que o gráfico de f e o de f^{-1} são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares ($y = x$) do sistema cartesiano ortogonal. É possível demonstrar que essa propriedade é válida para toda função invertível e sua inversa.

ATIVIDADES RESOLVIDAS

5. Considerando as funções reais f e g, definidas respectivamente por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$, determine:

a) $f(g(x))$ e $g(f(x))$;

b) os valores de x para que se tenha $f(g(x)) = g(f(x))$.

Comentar com os estudantes que a composição de funções não é comutativa. Este exemplo mostra isso.

Resolução

a) Para determinar $f(g(x))$, fazemos:

$f(g(x)) = f(2x^2 - 3) \Rightarrow f(g(x)) = 2x^2 - 3 + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(g(x)) = 2x^2 - 2$

Para determinar $g(f(x))$, fazemos:

$g(f(x)) = g(x + 1) \Rightarrow g(f(x)) = 2(x + 1)^2 - 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(f(x)) = 2(x^2 + 2x + 1) - 3 \Rightarrow g(f(x)) =$

$= 2x^2 + 4x - 1$

b) Igualando as leis de $f \circ g$ e de $g \circ f$, temos:

$2x^2 - 2 = 2x^2 + 4x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

Logo, $x = -\frac{1}{4}$.

6. Sabendo que $f(x) = 3x - 1$ e $f(g(x)) = 6x + 8$, determine $g(x)$.

Resolução

$f(x) = 3x - 1 \Rightarrow f(g(x)) = 3 \cdot g(x) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot g(x) - 1 = 6x + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot g(x) = 6x + 9 \Rightarrow g(x) = \frac{6x + 9}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x) = 2x + 3$

Logo, $g(x) = 2x + 3$.

7. Dadas as funções de domínio real definidas por $f(x) = x^2 - 5x + 6$ e $g(x) = x + 1$, determine os valores de x para que tenhamos $f(g(x)) = 0$.

Resolução

Como $g(x) = x + 1$, então $f(g(x)) = f(x + 1)$.

$f(x + 1) = (x + 1)^2 - 5(x + 1) + 6 =$

$= x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 6 = x^2 - 3x + 2$

Para determinar os valores de x para os quais $f(g(x)) = 0$, precisamos resolver a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Utilizando a fórmula resolutiva, temos:

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1$

Assim,

$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2}$

Logo, $x = 1$ ou $x = 2$.

Portanto, $f(g(x)) = 0$ para $x = 1$ ou $x = 2$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

8. Considerando a função real f bijetora, dada por $f(x) = x + 2$, determine a lei da função inversa g e esboce os gráficos de f e g em um mesmo plano cartesiano.

Resolução

Como a função f é bijetora, é invertível.

Admitindo g como a função inversa de f, temos:

$g(f(x)) = x, \forall\, x \in D(f)$ ou

$f(g(y)) = y, \forall\, y \in D(g)$.

Utilizando $f(g(y)) = y$, temos:

$g(y) + 2 = y$

$g(y) = y - 2$

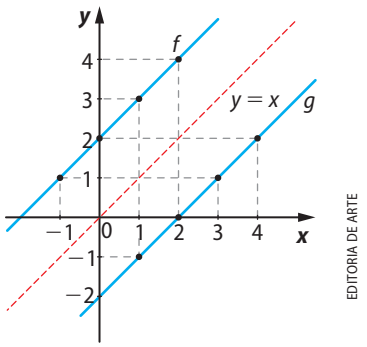
Substituindo a variável y por x, obtemos a lei da função inversa g na variável x:

$g(x) = x - 2$

Para construir os gráficos, podemos representar o gráfico da função f e, em seguida, determinar o gráfico de g, simétrico ao gráfico de f em relação à reta que contém as abscissas dos quadrantes ímpares ($y = x$).

Determinamos alguns pontos pelos quais passa a reta que representa a função f e esboçamos os gráficos em um mesmo sistema de coordenadas.

x	$y = f(x)$
-1	1
0	2
1	3
2	4



EDITORIA DE ARTE

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

10. Sendo f e g funções de domínio real com $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 1 - 3x$, determine:

a) $f(g(x))$ $9x^2 - 12x + 3$

b) $g(f(x))$ $-3x^2 - 6x + 1$

c) $(f \circ f)(x)$ $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

d) $(g \circ g)(x)$ $9x - 2$

11. Dados $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 2x - 3$, calcule x para que se tenha:

a) $f(g(x)) = 0$ $x = \frac{2}{3}$

b) $g(f(x)) = 0$ $x = -\frac{7}{6}$

12. Se $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, qual é o valor de x para que $f(f(x)) = 1$? $x = \frac{3}{2}$

13. Sejam $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e $g(x) = 4x + m$. Sabendo-se que $f(g(-1)) = 12$, calcule m. 1 ou 9

14. Se $f(x) = 5x + 1$ e $h(x) = 1 + 4x$, calcule $f(h(2)) + h(f(2))$. 91

15. (UEPB) Sendo $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $x \neq 1$ e $g(x) = 2x - 4$, o valor de $f(g(2)) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ é igual a: alternativa **c**

a) 1 **b)** -8 **c)** -9 **d)** 1 **e)** -2

16. (UFSC) Considere as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. Calcule $f(7)$. 56

17. Determine se cada uma das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ indicadas a seguir são invertíveis. Justifique sua resposta. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = x^3 - 1$

b) $f(x) = x^2$

18. Considerando a função invertível $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^3$, determine a lei da função f^{-1}. $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

19. Determine a lei da função inversa de cada função bijetora definida a seguir, considerando o domínio e o contradomínio como $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = x - 3$ $f^{-1}(x) = x + 3$

b) $g(x) = \dfrac{x+2}{4}$ $g^{-1}(x) = 4x - 2$

20. Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax - 2$ e g a função inversa de f. Sabendo que $f(-2) = 10$, determine a lei da função g. $g(x) = \frac{-x-2}{6}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

21. Considere uma função invertível dada por $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, com $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$, e determine:

a) $f^{-1}(x)$ $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

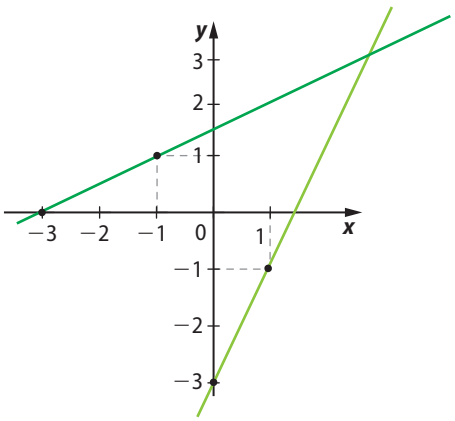
b) o domínio de f^{-1} $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

c) $f^{-1}(-3)$ 2

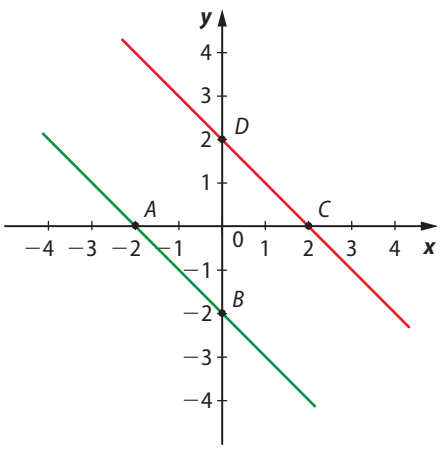
22. (UFRJ) Determine o valor real de a para que $f(x) = \frac{x+1}{2x+a}$ possua como inversa a função $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2x-1}$. 3

23. Em cada item a seguir estão representados em um mesmo sistema cartesiano ortogonal os gráficos de duas funções. Determine se as funções representadas são uma a inversa da outra. Justifique sua resposta.
Ver as **Orientações para o professor**.

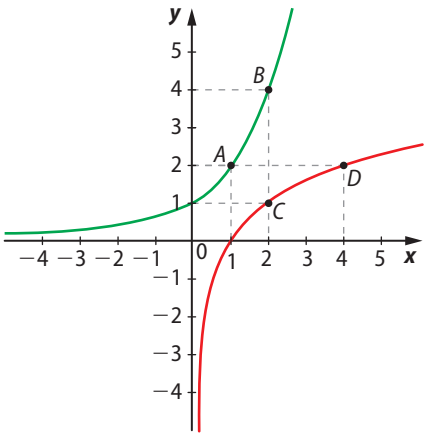
a)



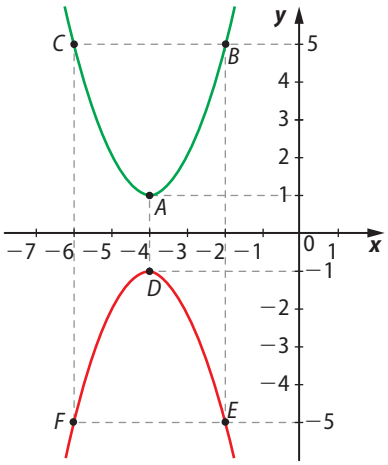
b)



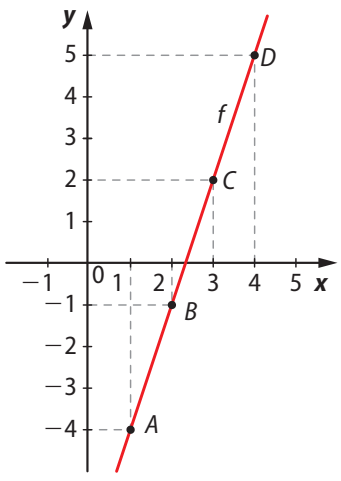
c)



d)



24. Uma função bijetora f está representada no gráfico. A partir dele, esboce o gráfico da função inversa f^{-1}. Ver as **Orientações para o professor**.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

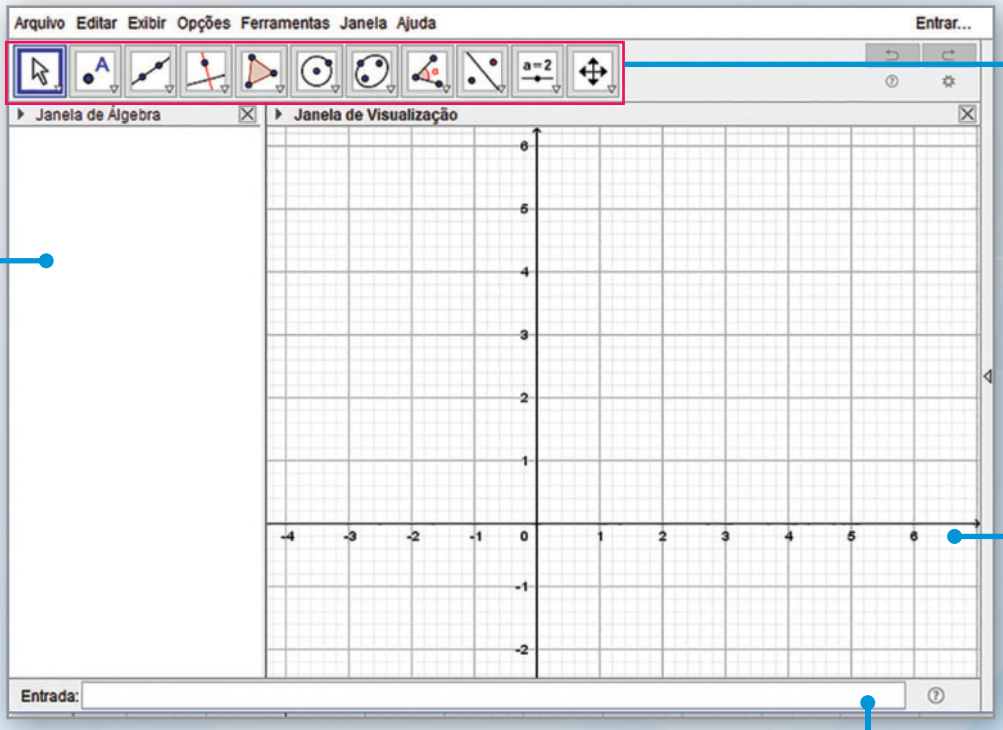
Conhecendo o GeoGebra

Orientar os estudantes a navegar pelo *site* do **GeoGebra**, pois nele há uma comunidade de discussão e muitas informações disponíveis, inclusive alguns tutoriais e materiais produzidos por professores.

O **GeoGebra** é um *software* de Matemática dinâmica que pode ser utilizado em todos os níveis de ensino. Trata-se de uma multiplataforma, pois possui portabilidade em todos os sistemas operacionais e pode ser instalado em computadores, *tablets* e *smartphones*.

Sua instalação deve ser feita por meio do *site* oficial <www.geogebra.org/download> (acesso em: 24 jun. 2020), baixando o *software* **GeoGebra** Clássico 5 e seguindo as orientações de instalação.

Uma vez instalado, uma tela inicial aparece ao executar o *software*. Essa tela é composta de várias janelas, com ferramentas e exibições específicas de acordo com a utilização.



Janela de Álgebra

A **Janela de Álgebra** mostra as representações algébricas, como equações e coordenadas das construções feitas.

Campo de entrada

No **Campo de entrada**, é possível inserir coordenadas, equações, comandos ou funções. Ao pressionar a tecla ***Enter***, a representação algébrica do objeto é apresentada na **Janela de Álgebra**, enquanto a representação gráfica é mostrada na **Janela de visualização**.

Além da **Janela de Álgebra** e da **Janela de visualização**, que são mostradas na tela inicial padrão, o **GeoGebra** possui outras janelas que, dependendo da construção que se deseja realizar, podem ser acionadas no menu **Exibir**.

Todas as janelas do **GeoGebra** estão relacionadas dinamicamente, ou seja, ao realizar uma alteração em algum objeto em uma delas, todas as representações desse mesmo objeto nas demais janelas serão alteradas automaticamente.

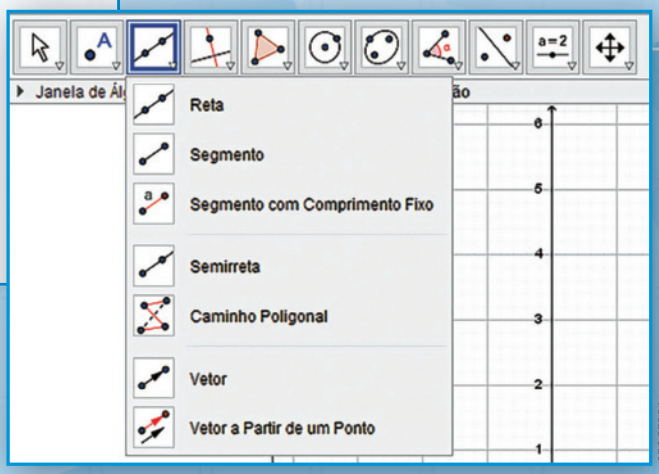
O **GeoGebra** utiliza linguagem e notação próprias, que podem diferir um pouco das utilizadas nesta Coleção. Por exemplo, para a separação da parte decimal de um número, o *software* usa o ponto no lugar da vírgula; para indicar as coordenadas de um ponto A qualquer, a notação é $A = (0,0)$ no lugar de $A(0, 0)$. Ao longo das atividades, conforme a necessidade, apresentaremos outras particularidades do **GeoGebra**.

Barra de ferramentas

A **Barra de ferramentas** é composta de 11 caixas contendo ferramentas diversas, relacionadas de alguma maneira dentro de seu subgrupo. Para acessá-las, basta clicar no canto inferior direito de cada caixa. Por exemplo, ao clicar na terceira caixa, são disponibilizadas as opções mostradas ao lado.

Ao escolher uma das ferramentas da caixa, ela aparece no início da **Barra de ferramentas** como "capa" daquela caixa de ferramentas.

Ao sobrepor o cursor do *mouse* sobre uma caixa, são apresentadas orientações sobre a ferramenta correspondente.



Janela de visualização

A **Janela de visualização** mostra as representações gráficas, como polígonos, circunferências e gráficos de funções das construções feitas.

ILLUS_MAN/SHUTTERSTOCK.COM

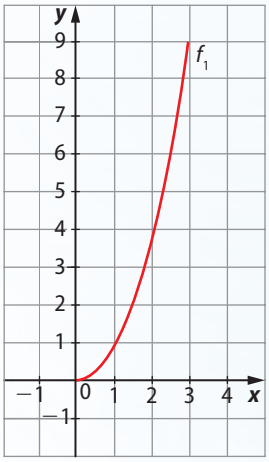
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

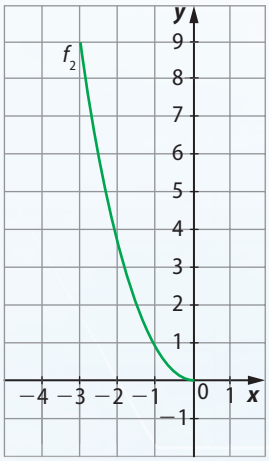
Explorando função inversa com o GeoGebra

Vimos que uma função f precisa ser bijetora para admitir função inversa. No entanto, nem todas as funções são bijetoras, por exemplo, a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = x^2$.

Porém, se restringirmos de maneira conveniente o domínio de f, podemos obter uma correspondência biunívoca. Podemos considerar, por exemplo, uma função $f_1: [0, 3] \to [0, 9]$, definida por $f_1(x) = x^2$ e uma função $f_2: [-3, 0] \to [0, 9]$, definida por $f_2(x) = x^2$, cujos gráficos estão representados a seguir.



■ A função $f_1: [0, 3] \to [0, 9]$ é bijetora.



■ A função $f_2: [-3, 0] \to [0, 9]$ é bijetora.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

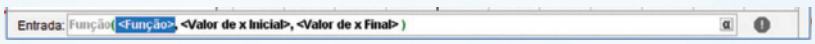
Vamos, agora, utilizar o **GeoGebra** para representar o gráfico da função inversa de f_1 e o da função inversa de f_2. Para isso, execute os passos a seguir.

I. No **Campo de entrada**, digite a palavra "função" e selecione a opção:

Função[<Função>, <Valor de *x* Inicial>, <Valor de *x* Final>]

Essa opção nos permite restringir, no **GeoGebra**, o domínio da função que estamos estudando.

II. Digite "*x*^2" no local correspondente à **<Função>**. O acento circunflexo indica para o programa que o número 2 é um expoente.



Em seguida, digite "0" (zero) no local correspondente ao **<Valor de *x* Inicial>**.

Em seguida, digite "3" (três) no local correspondente ao **<Valor de *x* Final>**.

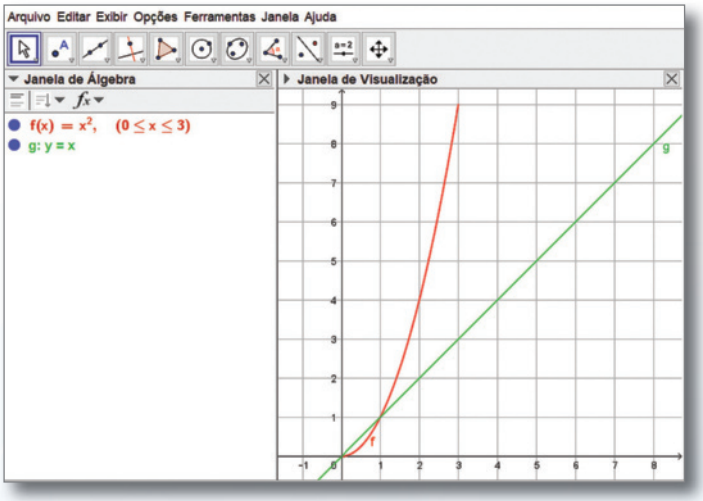
FOTOS: GEOGEBRA

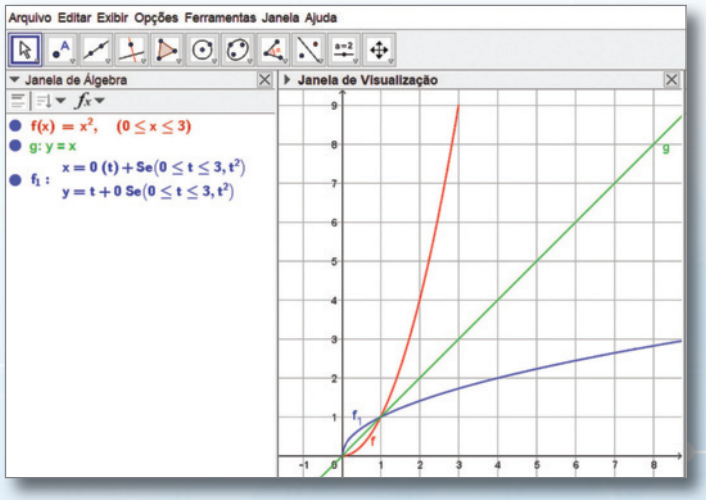
Em seguida pressione a tecla ***Enter***. O **Geogebra** vai exibir o gráfico de f_1 na **Janela de visualização**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

III. Vimos que o gráfico de uma função e o de sua inversa são simétricos em relação à reta que contém as bissetrizes dos quadrantes ímpares.

Para representar essa reta, digite "$y = x$" no **Campo de entrada** e pressione ***Enter***.





FOTOS: GEOGEBRA

IV. Para obter a função inversa de f_1 selecione a ferramenta (**Reflexão em relação a uma reta**). Em seguida, clique sobre o gráfico de f e, posteriormente, sobre a reta que contém a bissetriz dos quadrantes ímpares. O gráfico obtido é o da função inversa de f, mostrado a seguir.

Para obter o gráfico da função inversa de f_2, repita a sequência de passos apresentada, considerando -3 como <**Valor de** x **Inicial**> e 0 como <**Valor de** x **Final**>.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Construa no **GeoGebra** o gráfico da função definida por $g(x) = x^3$. Para isso, digite "$y = x\text{^}3$" no **Campo de entrada**. Observe o gráfico obtido e responda: a função g é bijetora? Justifique sua resposta. A função g é bijetora, pois, traçando retas paralelas ao eixo x, passando por pontos cuja ordenada pertence a CD(g), elas cruzam o gráfico de g em um único ponto.
2. Para construir o gráfico da função inversa de g, é necessário restringir o domínio como foi feito para a função f observada no início da seção? Não, pois g é uma função bijetora e, portanto, admite função inversa.
3. Represente o gráfico da função g^{-1} na mesma **Janela de visualização** em que g foi representada. Quantos pontos de intersecção há entre os gráficos de g e g^{-1}? 3

ILUS_MAN/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Módulo de um número real

Em situações envolvendo distância e comprimento, os resultados verificados são números positivos. Veremos, agora, alguns conceitos matemáticos que nos auxiliam no trabalho com essas situações.

Acompanhe a definição matemática a seguir.

O **valor absoluto** ou **módulo** de um número real x, que indicaremos por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Lê-se: módulo de x.

SAIBA QUE...

A notação $|x|$ foi introduzida pelo matemático alemão Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897).

Observe alguns exemplos:

a) $|+5| = +5 = 5$

b) $\left|+\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$

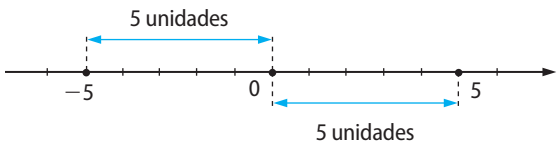
c) $|0| = 0$

d) $|-3| = -(-3) = 3$

e) $\left|-\sqrt{3}\right| = -(-\sqrt{3}) = \sqrt{3}$

f) $\left|-\frac{7}{5}\right| = -\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{7}{5}$

Geometricamente, o módulo de um número real x é igual à distância do ponto correspondente a esse número até a origem da reta real. Observe:



- $|-5| = 5$ (distância entre o ponto correspondente a -5 e a origem).
- $|+5| = 5$ (distância entre o ponto correspondente a $+5$ e a origem).

De modo geral, sendo $a > 0$, se $|x| = a$, então $x = a$ ou $x = -a$.

Em particular, se $|x| = 0$, então $x = 0$.

Por exemplo, para saber o valor de x tal que $|x| = 4$, basta verificar quais valores distam 4 unidades da origem. Nesse caso, são $+4$ e -4.

Logo, se $|x| = 4$, então $x = -4$ ou $x = +4$.

Além disso, para c e d reais $|c| = |d|$ se, e somente se, $c = d$ ou $c = -d$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Propriedades

Observe a seguir algumas propriedades envolvendo o módulo de um número real.

1ª propriedade:

Para todo x real, temos $|x| \geqslant 0$.

A demonstração é imediata da definição de módulo. Veja:

Se $x > 0$, então $|x| = x > 0$.

Se $x < 0$, então $|x| = -x$. Logo, $|x| > 0$.

Se $x = 0$, então $|x| = 0$

Portanto, $|x| \geqslant 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

2ª propriedade:

Para todo x real, temos $|x|^2 = x^2$.

Se $x \geqslant 0$, então $|x| = x$.

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos:

$|x|^2 = x^2$

Se $x < 0$, então $|x| = -x$.

Elevando ao quadrado ambos os membros dessa igualdade, temos:

$|x|^2 = (-x)^2 = x^2$

Portanto, $|x|^2 = x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

3ª propriedade:

Para quaisquer números reais x e y, temos $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Pela propriedade anterior, temos:

$|x \cdot y|^2 = (x \cdot y)^2$

Por outro lado, pelas propriedades de potenciação, sabemos que $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$.

Assim, $|x \cdot y|^2 = x^2 \cdot y^2$.

Utilizando novamente a propriedade anterior, temos:

$|x \cdot y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2$

Utilizando novamente as propriedades de potenciação, temos:

$|x \cdot y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2$

Como $|x \cdot y| \geqslant 0$ e $|x| \cdot |y| \geqslant 0$, obtemos:

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

Portanto, $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ para quaisquer números reais x e y.

4ª propriedade:

Para quaisquer números reais x e y, com $y \neq 0$, temos $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

Pela **2ª** propriedade, temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2$$

Por outro lado, pelas propriedades de potenciação, sabemos que $\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$.

Assim, $\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \frac{x^2}{y^2}$.

Utilizando novamente a **2ª** propriedade, temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \frac{|x|^2}{|y|^2}$$

Utilizando novamente as propriedades de potenciação, temos:

$$\left|\frac{x}{y}\right|^2 = \left(\frac{|x|}{|y|}\right)^2$$

Como $\left|\frac{x}{y}\right| \geqslant 0$ e $\frac{|x|}{|y|} \geqslant 0$, obtemos:

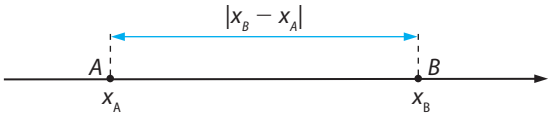
$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

Portanto, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ para quaisquer números reais x e y, com $y \neq 0$.

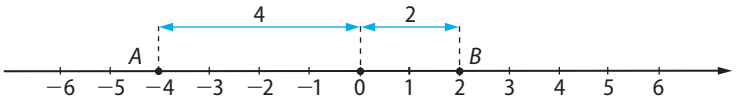
TARAPONG SIRI/SHUTTERSTOCK.COM; UNIYOK/SHUTTERSTOCK.COM

Distância entre dois pontos na reta real

Dados dois pontos A e B na reta real, correspondentes aos números reais x_A e x_B, respectivamente, a distância entre A e B é dada por $|x_B - x_A|$.



Por exemplo:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

A distância entre os pontos A e B é calculada por:

$$|2 - (-4)| = |2 + 4| = |6| = 6.$$

Do mesmo modo, a distância entre os pontos B e A é calculada por:

$$|-4 - 2| = |-6| = 6.$$

SAIBA QUE...

É possível demonstrar que, na reta real, a distância entre dois pontos A e B, correspondentes aos números reais x_A e x_B, respectivamente, pode ser calculada por $|x_B - x_A|$ ou $|x_A - x_B|$.

Função modular

Vimos que, para cada número real x, existe um único número $|x|$ correspondente. Com base nisso, podemos determinar uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que associa cada número real ao seu módulo. Essa função é um caso particular da função definida por mais de uma sentença.

A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|$ é denominada **função modular** ou **função módulo**.

Aplicando a definição de módulo de um número real, a função modular pode ser escrita como:

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Gráfico da função modular

Para construir o gráfico da função modular, podemos traçar separadamente o gráfico de cada sentença que compõe a lei da função no sistema cartesiano e, posteriormente, reunir as representações, assim como fizemos com o gráfico da função definida por mais de uma sentença.

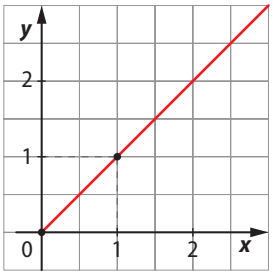
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Considerando, por exemplo, a função dada por $f(x) = |x|$, temos:

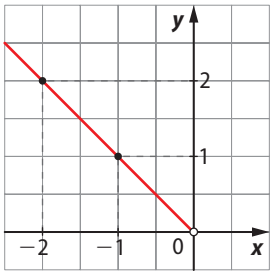
- $f(x) = x$ para $x \geqslant 0$

x	$y = f(x)$
0	0
1	1

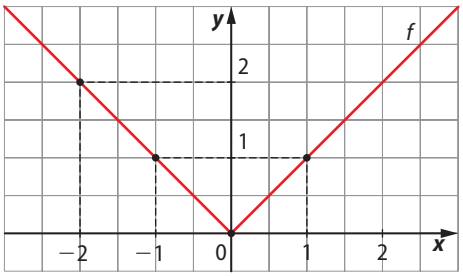


- $f(x) = -x$ para $x < 0$

x	$y = f(x)$
−1	1
−2	2



Reunindo em um mesmo sistema cartesiano as duas representações anteriores, temos o gráfico da função modular definida por $f(x) = |x|$.

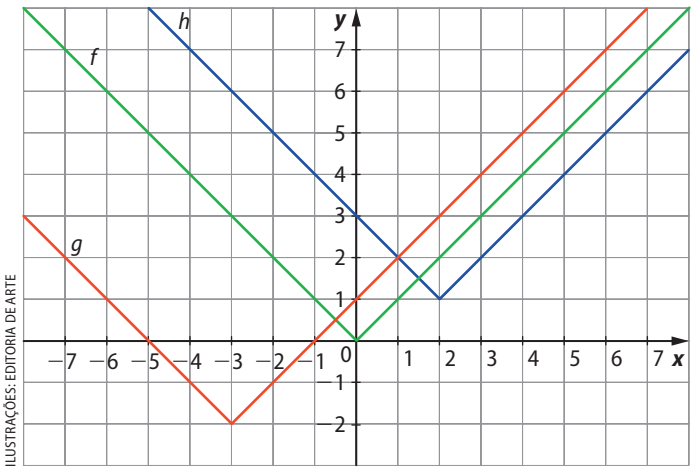


Observe que o domínio dessa função é $D(f) = \mathbb{R}$ e o conjunto imagem é $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$.

Outros gráficos de funções modulares

Com base no gráfico da função dada por $f(x) = |x|$, podemos construir gráficos de outras funções envolvendo o módulo de um número real.

Observe, por exemplo, o gráfico das funções a seguir em um mesmo sistema cartesiano:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$f(x) = |x|$
$g(x) = |x + 3| - 2$
$h(x) = |x - 2| + 1$

PENSE E RESPONDA

- No exemplo da função f, se $x \geqslant 0$, a função f é uma restrição da função identidade. A partir dessa informação como poderíamos construir o gráfico desse pedaço da função, sem recorrer à tabela de pontos?
- De modo análogo, como poderíamos proceder para construir o gráfico de f para $x < 0$?

Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Fazendo translações do gráfico da função f, podemos obter os gráficos de g e de h. O procedimento é o seguinte:

- o gráfico da função g, dada por $g(x) = |x + 3| - 2$ é obtido após o gráfico de f sofrer uma translação horizontal de 3 unidades para a esquerda, seguida de uma translação vertical de 2 unidades para baixo;
- o gráfico da função h, dada por $h(x) = |x - 2| + 1$ é obtido após o gráfico de f sofrer uma translação horizontal de 2 unidades para a direita, seguida de uma translação vertical de 1 unidade para cima.

De modo geral, considerando uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x + a| + b$, o gráfico dessa função pode ser obtido por meio de translações do gráfico da função definida por $f(x) = |x|$. Para isso, podemos considerar os seguintes casos:

- $b > 0$, o gráfico é transladado para cima em b unidades;
- $b < 0$, o gráfico é transladado para baixo em $|b|$ unidades;
- $a > 0$, o gráfico é transladado para a esquerda em a unidades;
- $a < 0$, o gráfico é transladado para a direita em $|a|$ unidades.

Equações modulares

Toda equação cuja incógnita se apresenta dentro de módulo é denominada **equação modular**. Por exemplo:

a) $|x + 5| = 8$

b) $|x^2 - 2x + 1| = x + 1$

c) $|x|^2 + 5|x| = 0$

d) $|4x - 1| = |x + 8|$

Com base na definição do módulo de um número real, considerando $a > 0$, podemos escrever a seguinte propriedade:

$$|x| = a \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = -a$$

Utilizamos essa propriedade na resolução de equações modulares.

Considerando o exemplo do item **a**, temos $|x + 5| = 8$.

Como $8 > 0$, para resolver essa equação, fazemos:

- $x + 5 = 8 \Rightarrow x = 3$;
- $x + 5 = -8 \Rightarrow x = 13$.

Assim, os números 3 e 13 são soluções da equação $|x + 5| = 8$.

PIXELDREAMS.EU/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Em cada caso, simplifique a expressão $|x - 1| + |x - 3|$ sabendo que x é um número real tal que:

a) $x \geqslant 3$

b) $1 \leqslant x \leqslant 2$

c) $x < 1$

Resolução

Pela definição de módulo, temos:

$$|x - 1| = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x - 1 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 1 \\ -x + 1, \text{ se } x - 1 < 0 \Rightarrow x < 1 \end{cases}$$

$$|x - 3| = \begin{cases} x - 3, \text{ se } x - 3 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 3 \\ -x + 3, \text{ se } x - 3 < 0 \Rightarrow x < 3 \end{cases}$$

a) Para $x \geqslant 3$, temos:

$|x - 1| + |x - 3| = x - 1 + x - 3 = 2x - 4$

b) Para $1 \leqslant x \leqslant 2$, temos:

$|x - 1| + |x - 3| = x - 1 - x + 3 = 2$

c) Para $x < 1$, temos:

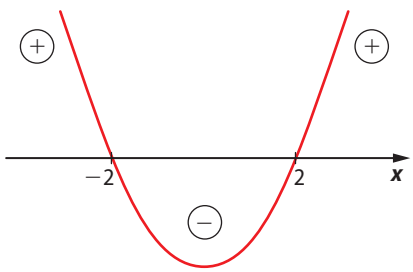
$|x - 1| + |x - 3| = -x + 1 - x + 3 = -2x + 4$

10. Construa o gráfico da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = |x^2 - 4|$, e determine seu conjunto imagem.

Resolução

Podemos reescrever a lei da função f como uma função definida por mais de uma sentença. Para isso, vamos estudar o sinal de $y = x^2 - 4$ para definir os intervalos de x para cada sentença da lei de f. Nesse caso, temos:

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$



EDITORIA DE ARTE

$x^2 - 4 \geqslant 0$ para $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$
$x^2 - 4 < 0$ para $-2 < x < 2$

Logo, a função f é dada por:

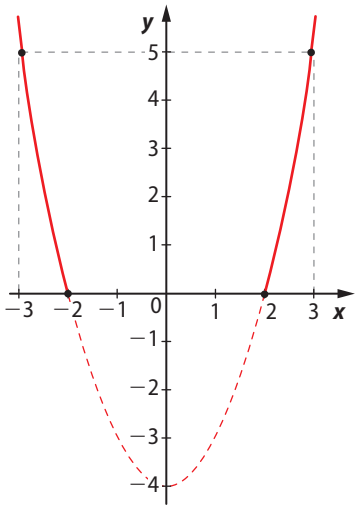
$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 \text{ para } x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 2 & \text{(I)} \\ -x^2 + 4 \text{ para } -2 < x < 2 & \text{(II)} \end{cases}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Vamos traçar separadamente o gráfico de cada sentença que compõe a lei da função e, posteriormente, reunir em um mesmo sistema cartesiano as representações obtidas.

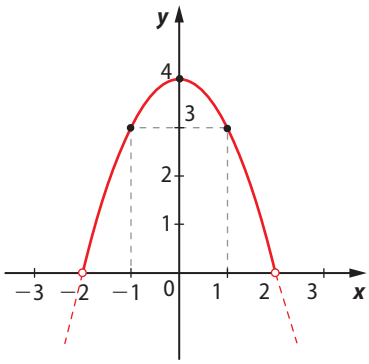
(I) $f(x) = x^2 - 4$ para $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$

x	$f(x)$
−3	5
−2	0
2	0
3	5



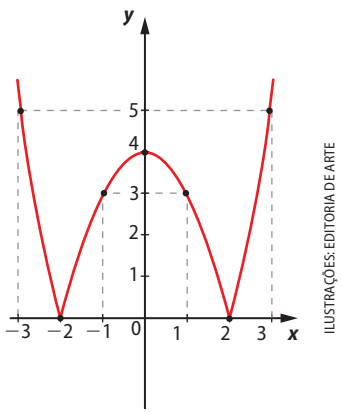
(II) $f(x) = -x^2 + 4$ para $-2 < x < 2$

x	$f(x)$
−1	3
0	4
1	3



Observe que as partes da parábola que não representam o gráfico de f aparecem tracejadas em cada caso.

Reunindo em um mesmo sistema cartesiano as partes obtidas em (I) e (II), temos o gráfico da função f.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O conjunto imagem da função é $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 0\}$ ou simplesmente é $\text{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.

Outra maneira de traçar, que poderia ser utilizada para construir o gráfico de f, seria realizar uma reflexão em relação ao eixo x da parte negativa do gráfico de uma função real dada por $g(x) = x^2 - 4$, pois o módulo de um número negativo é o oposto desse número.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

11. Resolva as equações a seguir no conjunto dos números reais.

a) $|x^2 - 5x| = 6$ **b)** $|x - 2| = |3 - 2x|$

Resolução

a) Como $6 > 0$, utilizamos a propriedade $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ na resolução da equação modular $|x^2 - 5x| = 6$.

Assim, temos:

$$|x^2 - 5x| = 6 \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 5x = 6 \text{ ou } (\text{I}) \\ x^2 - 5x = -6 \ (\text{II}) \end{cases}$$

De (I), temos: $x^2 - 5x - 6 = 0$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $x' = 6$ e $x'' = -1$.

De (II), temos: $x^2 - 5x + 6$

Resolvendo essa equação do 2º grau, obtemos $x' = 3$ e $x'' = 2$.

Portanto, $S = \{-1, 2, 3, 6\}$.

b) Como $|3 - 2x| > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, utilizamos a propriedade $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ na resolução da equação $|x - 2| = |3 - 2x|$.

Assim, temos:

$$|x - 2| = |3 - 2x| \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 - 2x \text{ ou } (\text{I}) \\ x - 2 = -(3 - 2x) \ (\text{II}) \end{cases}$$

De (I), temos: $x - 2 = 3 - 2x \Rightarrow 3x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

De (II), temos: $x - 2 = -3 + 2x \Rightarrow -x = -1 \Rightarrow x = 1$

Portanto, $S = \left\{1, \frac{5}{3}\right\}$.

12. Determine o conjunto solução da equação: $|2x + 1| = x - 3$

Resolução

Como o módulo de um número real x é sempre maior do que ou igual a 0, é necessário que $x - 3 \geqslant 0$. Logo, $x \geqslant 3$.

Supondo $x - 3 > 0$, utilizamos a propriedade $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$ na resolução da equação modular $|2x + 1| = x - 3$.

Assim, temos:

$$|2x + 1| = x - 3 \Rightarrow \begin{cases} 2x + 1 = x - 3 \text{ ou } (\text{I}) \\ 2x + 1 = -x + 3 \ (\text{II}) \end{cases}$$

De (I), obtemos: $2x + 1 = x - 3 \Rightarrow x = -4$

De (II), obtemos: $2x + 1 = -x + 3 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

Como $x = -4$ e $x = \frac{2}{3}$ não satisfazem a condição $x \geqslant 3$, não existe $x \in \mathbb{R}$ que é solução da equação, ou seja, o conjunto solução é vazio.

Portanto, $S = \varnothing$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

25. De acordo com a definição de módulo, calcule:

a) $|3 - 5|$ 2

b) $|-3 + 5|$ 2

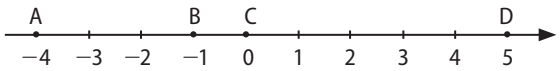
c) $|-3 - 5|$ 8

d) $|-1| + |-6|$ 7

e) $|-|-5||$ 5

f) $|-2| - |-10|$ -8

26. Considere os pontos A, B, C e D representados na reta real abaixo:



Calcule a distância entre os pontos indicados nos item a seguir.

a) A e B 3

b) B e C 1

c) B e D 6

d) A e D 9

27. Aplicando a definição de módulo, determine o valor numérico de:

a) $2x - |x|$, para $x = -4$. -12

b) $\left|\frac{4x+1}{5-2x}\right|$, para $x = -1$. $\frac{3}{7}$

c) $|x^3 + x| - |x^2 - 3x + 1|$, para $x = -2$. -1

28. Simplifique a expressão algébrica $A = |x| + |x + 2|$ para os seguintes valores de x:

a) $x < -2$ $-2x - 2$

b) $-2 \leqslant x < 0$ 2

c) $x \geqslant 0$ $2x + 2$

29. Escreva a expressão $|x + 3| + |2x - 1|$ sem os módulos, para $x > 3$. $3x + 2$

30. Qual é o conjunto de valores assumidos pela expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$ sendo a, b e c números reais não nulos e:

a) a, b e c positivos? 3

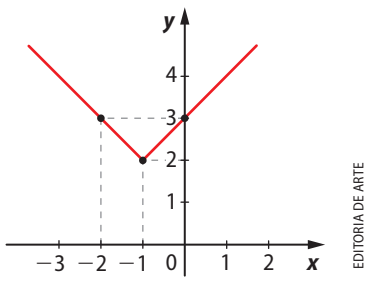
b) a, b e c negativos? -3

31. Considere a função definida por $f(x) = \frac{2}{|x-3|}$ e faça o que se pede.

a) Há algum valor de $x \in \mathbb{R}$ para o qual a função não está definida? Se sim, qual é esse valor? sim, para $x = 3$

b) Calcule o valor de $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $\frac{4}{5}$

32. Observe a seguir o gráfico da função f.



EDITORIA DE ARTE

Determine a lei da função f, o domínio $D(f)$ e o conjunto imagem $Im(f)$.
$f(x) = |x + 1| + 2$; $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

33. Construa o gráfico de cada função definida a seguir. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = |x - 3|$

b) $g(x) = |x - 3| + 4$

c) $h(x) = |-2x + 1|$

d) $j(x) = |-2x + 1| - 3$

e) $m(x) = |x^2 - 4| - 5$

34. O preço médio de certo produto agrícola é dado em função do mês do ano em que é comercializado. Se P é o preço médio em reais e n é o número correspondente ao mês do ano, P em função de n é dado por $P(n) = 8 - |6 - n|$. Determine para qual valor de n ocorre o valor mínimo de P. $n = 12$

35. Construa o gráfico das funções definidas a seguir e determine o domínio e o conjunto imagem de cada uma. Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = |x| + |x - 2|$

b) $g(x) = |x - 1| + |x - 3|$

36. Resolva as seguintes equações modulares:

a) $|3x + 1| = 6$ $S = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

b) $\left|\frac{x-2}{3}\right| = 1$ $S = \{-1, 5\}$

c) $|x^2 + 4x| = 12$ $S = \{-6, 2\}$

37. Um posto de combustível está localizado em determinado ponto de uma rodovia de 350 km de comprimento. A distância de um viajante que está nessa rodovia até o posto pode ser determinada por uma função definida por $d(x) = |x - 200|$, em que $d(x)$ é a distância, em

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

quilômetro, e x indica o km da rodovia onde o viajante se encontra. De acordo com essas informações, responda:

a) Em qual km dessa rodovia está localizado o posto? km 200

b) Em quais pontos da rodovia pode estar uma pessoa que se encontra a uma distância de 135 km do posto de combustível? km 65 ou km 335

38. (Epcar-MG) Considere a equação $|x| = x - 6$. Com respeito à solução real dessa equação, pode-se afirmar que a: alternativa **d**

a) solução pertence ao intervalo fechado $[1, 2]$.

b) solução pertence ao intervalo fechado $[-2, -1]$.

c) solução pertence ao intervalo aberto $]-1, 1[$.

d) equação não tem solução.

39. (Fafeod-MG) Sejam S_1 e S_2 os conjunto solução das seguintes equações modulares, respectivamente:
(i) $|x - 5| = 1 - 2x$
(ii) $|2x - 6| = 6 - 2x$
Assim sendo, é CORRETO afirmar, então, que o conjunto $S_1 \cap S_2$ é igual a: alternativa **d**

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1\}$

b) $\{-4, 2\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 3\}$

d) $\{-4\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$

40. (Udesc-SC) A soma das raízes distintas da equação $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$ é: alternativa **e**

a) 10 **d)** 3
b) 7 **e)** 4
c) 0

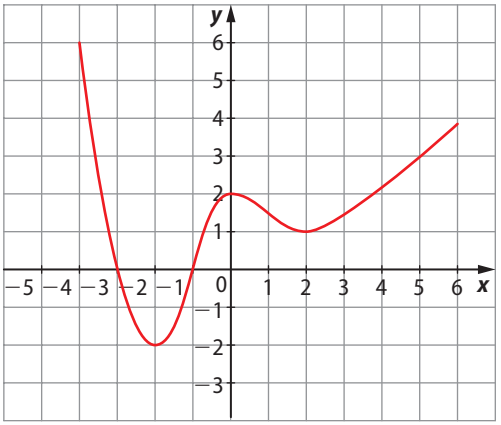
41. (ITA-SP) O produto das raízes reais da equação $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$ é igual a: alternativa **a**

a) -5 **d)** 2
b) -1 **e)** 5
c) 1

42. (Furg-RS) O produto de todas as raízes da equação $|x^2 - 8| - 4 = 0$ é: alternativa **e**

a) 4. **c)** -8. **e)** 48.
b) -4. **d)** -48.

43. (Insper-SP) A figura a seguir mostra o gráfico da função $f(x)$.

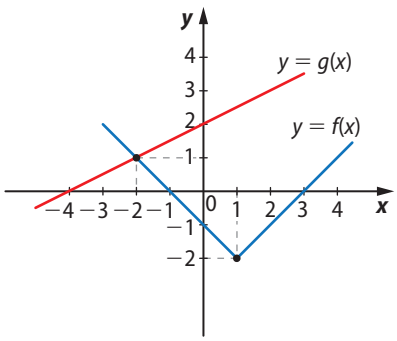


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

O número de elementos do conjunto solução da equação $|f(x)| = 1$, resolvida em $\mathbb{R}$, é igual a:

a) 6 **c)** 4 **e)** 2
b) 5 alternativa **b** **d)** 3

44. (Udesc-SC) Considere os gráficos ilustrados na figura:



Classifique cada sentença abaixo como verdadeira (**V**) ou falsa (**F**).
( ) O valor de $g(f(-1)) - f(g(-2) + 2)$ é igual a 2.
( ) O valor de $f(g(-4) + 1) + 3$ é igual a 1.
( ) A lei de formação de $y = f(x)$ é $y = |x - 1| - 2$.
Assinale a alternativa que contém a sequência correta, de cima para baixo: alternativa **b**

a) V - F - V **c)** F - V - F **e)** V - V - F
b) V - V - V **d)** F - V - V

45. (UECE) Se $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2$, então as raízes irracionais da equação $|f(x) - 6| = 8$ são: alternativa **c**

a) $2\sqrt{2}$ e $-2\sqrt{2}$. **c)** $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$.
b) $3\sqrt{2}$ e $-3\sqrt{2}$. **d)** $5\sqrt{2}$ e $-5\sqrt{2}$.

Resolvendo equações modulares

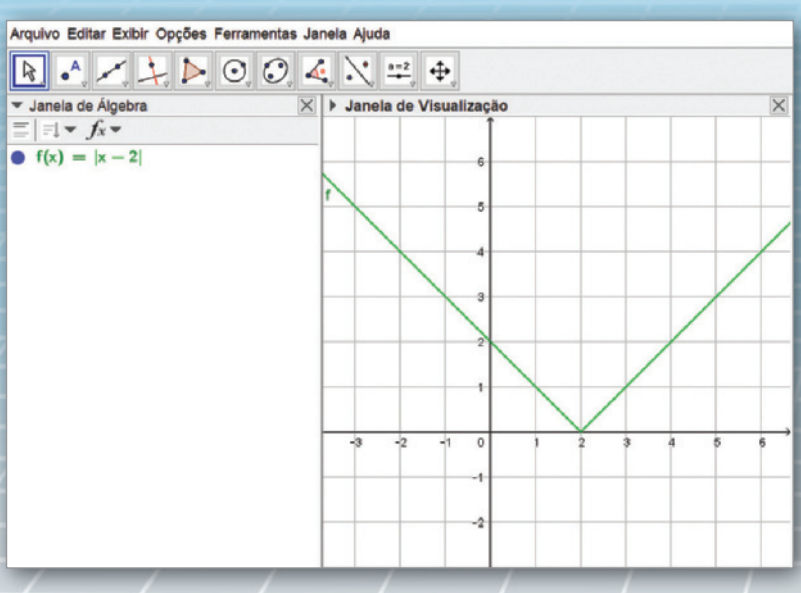
No Ensino Fundamental, você deve ter estudado como resolver graficamente um sistema de duas equações do primeiro grau com duas incógnitas. Nesse caso, a intersecção das duas retas correspondentes, quando são concorrentes, nos fornece a solução do sistema proposto.

Vamos utilizar um raciocínio análogo para resolver graficamente equações modulares. Para isso, vamos considerar cada membro da equação como uma função. Nesse caso, a solução da equação modular será obtida por meio das abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos das funções.

Por exemplo, para resolver a equação modular $|x - 2| = 4$, realize, no **GeoGebra**, os passos a seguir.

I. Considere o primeiro membro da equação como lei da função f, ou seja, $f(x) = |x - 2|$. Considere o segundo membro da equação como lei da função g, ou seja, $g(x) = 4$.

II. No **GeoGebra**, a função **abs(*x*)** é usada para escrevermos o módulo. Assim, para construir o gráfico da função f, digite no **Campo de entrada**: $f(x) = \text{abs}(x - 2)$. Em seguida, digite ***Enter***.

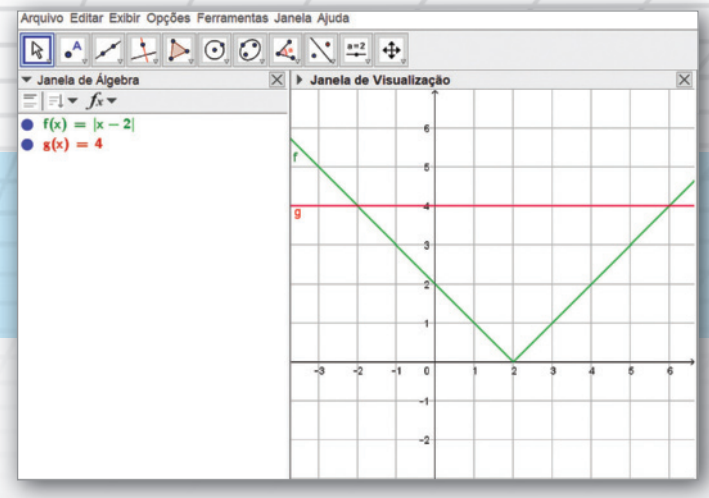


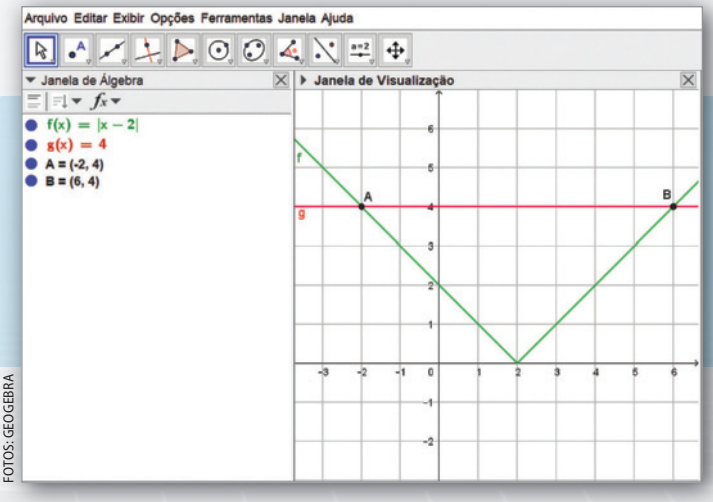
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

IUZVYKOVA IAROSLAVA/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

III. Para construir o gráfico da função g, digite no **Campo de entrada**: $g(x) = 4$. Em seguida, digite ***Enter***.





FOTOS: GEOGEBRA

IV. Para determinar a solução procurada, selecione (**Intersecção de dois objetos**) e clique diretamente nos pontos de intersecção do gráfico de f e de g.

Nesse caso, obtemos os pontos $A(-2, 4)$ e $B(6, 4)$. As abscissas desses pontos representam o conjunto solução da equação $|x - 2| = 6$.

Assim, $S = \{-2, 6\}$.

Observe que, nesse exemplo, utilizamos $g(x) = 6$, mas pode ser que o segundo membro da equação modular não seja apenas um número. Se isso acontecer g não será uma função constante. É preciso ficar atento para localizar todos os pontos de intersecção entre os gráficos. A abscissa de cada um desses pontos representa uma solução.

Agora, faça o que se pede na atividade a seguir.

1. Utilize o **GeoGebra** para resolver as seguintes equações: NÃO ESCREVA NO LIVRO

a) $|2x - 1| = 5$ $S = \{-2, 3\}$

b) $|x + 3| = 2x + 1$ $S = \{2\}$

c) $|2x - 1| = |2x + 3|$ $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

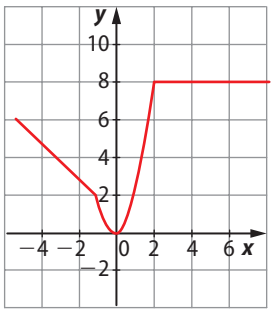
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

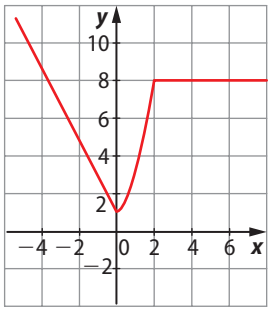
NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (IFSul-RS) O gráfico que descreve a função $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \leq -1 \\ 2x^2, \text{ se } -1 < x \leq 2 \\ 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$ é: alternativa **a**

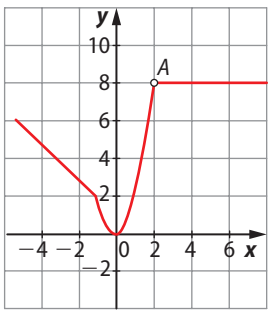
a)



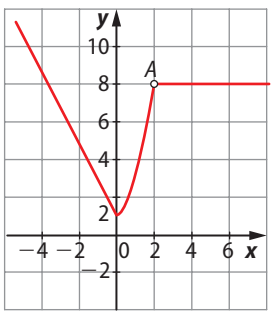
b)



c)



d)



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

2. (ESPM-SP) Sejam f e g funções reais tais que $f(2x + 1) = 2x + 4$ e $g(x + 1) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos afirmar que a função $f \circ g(x)$ é dada por: alternativa **d**

a) $2x - 1$ **c)** $3x + 1$ **e)** $x - 3$

b) $x + 2$ **d)** $2x$

3. (IFSul-RS) A função f: $[0, +\infty[\to [4, +\infty[$, definida por $f(x) = (x + 2)^2$, possui inversa f^{-1}: $[4, +\infty[\to [0, +\infty[$, definida por alternativa **d**

a) $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$ **c)** $f^{-1}(x) = \sqrt{x} + 2$

b) $f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$ **d)** $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$

4. (UEPB) Dada a função bijetora tal que $f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, o domínio de f^{-1} é: alternativa **b**

a) $\mathbb{R}$

b) $\mathbb{R} - \{3\}$

c) $\mathbb{R} - \{1\}$

d) $\mathbb{R} - \{-1\}$

e) $\mathbb{R} - \left\{-\frac{2}{3}\right\}$

5. (IFSul-RS) Considere a função f: $[-5, 3] \to A \subset \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x + 2| - 3$. Se f é sobrejetora, então alternativa **d**

a) $A = [-6, 2]$. **c)** $A = [-4, 2]$.

b) $A = [-5, 2]$. **d)** $A = [-3, 2]$.

6. (PUC-PR) Um economista, no início de 2007, fez uma projeção sobre a situação financeira de um grupo de investidores que aplicam na bolsa de valores, e observou que a variação dos ganhos dessas aplicações é alterada diariamente; assim, concluiu que o lucro diário é dado pela função $f(x) = |x - 200| \cdot 50$, onde x representa cada dia do ano, ($x = 1, 2, 3, ..., 365$), e o lucro é dado em real. Se o grupo de investidores pretende um lucro de R$ 5.750,00, em quais meses isso será possível? alternativa **c**

a) Abril e novembro.

b) Março e outubro.

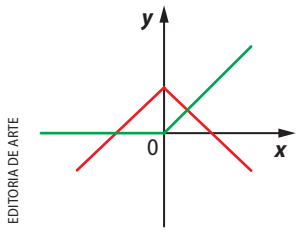
c) Março e novembro.

d) Maio e outubro.

e) Abril e outubro.

7. (Mack-SP) Observando, na figura, os esboços dos gráficos das funções $f(x) = \frac{x + |x|}{2}$ e $g(x) = -|x| + 1$, considere as afirmações:

alternativa **a**



EDITORIA DE ARTE

I. Não existe $x < 0$, tal que $g(x) > f(x)$.

II. As soluções de $f(x) \geqslant g(x)$ são todas positivas.

III. A soma das raízes da equação $f(x) = g(x)$ é $\frac{1}{2}$.

Então:

a) Todas são falsas.

b) Todas são verdadeiras.

c) Somente I e II são verdadeiras.

d) Somente I e III são verdadeiras.

e) Somente II e III são verdadeiras.

8. (PUC-MG) Todas as afirmativas abaixo sobre números reais são corretas, EXCETO:

alternativa **e**

a) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

b) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ com $y \neq 0$

c) $\sqrt{x^2} = |x|$

d) Se $x < 0$ e $y = x^2$, então $x = -\sqrt{y}$

e) $|x + y| = |x| + |y|$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, vimos que, em algumas situações do dia a dia, o comportamento de uma grandeza depende do comportamento de outra, mas essa relação é estabelecida de acordo com classes ou faixas de valores. Estudamos também como podemos utilizar a ideia de função para estabelecer modelos que podem ser utilizados para fazer estimativas e possibilitar algumas tomadas de decisão de forma mais consciente.

Estudamos o conceito de função definida por mais de uma sentença, bem como o domínio, contra domínio e imagem de funções, classificações, representações gráficas, função composta e função inversa, além de módulo de números reais, função modular e equações modulares.

Nas páginas de abertura, foi apresentada uma situação envolvendo uma discussão sobre imposto de renda, que foi retomada um pouco mais adiante. Depois de ter estudado o conteúdo deste Capítulo, você consegue reconhecer que esses conceitos podem auxiliá-lo a compreender e a analisar a situação apresentada na abertura? Você já tinha essa percepção antes de estudar esses conceitos?

Vamos refletir a respeito das aprendizagens do Capítulo **1**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual(is)?
- Você consegue pensar em outras situações do dia a dia que envolvem a ideia de função definida por mais de uma sentença e de função modular?
- Você consegue reconhecer se houve um aprofundamento em relação ao que você conhecia sobre o conceito de função?
- Você utiliza os conceitos estudados para analisar situações antes de tomar decisões e de resolver problemas do dia a dia? Respostas pessoais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

2

Função exponencial

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 1, 2, 4, 5, 7 e 8
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1: EM13MAT103
  - Competência específica 2: EM13MAT203
  - Competência específica 3: EM13MAT303, EM13MAT304 e EM13MAT313
  - Competência específica 4: EM13MAT403
- **Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Você já parou para pensar por que os vírus são os maiores causadores de doenças que podem afetar todo o planeta? A resposta está na alta taxa de transmissibilidade deles, que pode ocorrer de forma exponencial. Neste Capítulo, vamos estudar as funções exponenciais e de que modo elas podem nos ajudar a interpretar casos como o da transmissão do vírus covid-19.

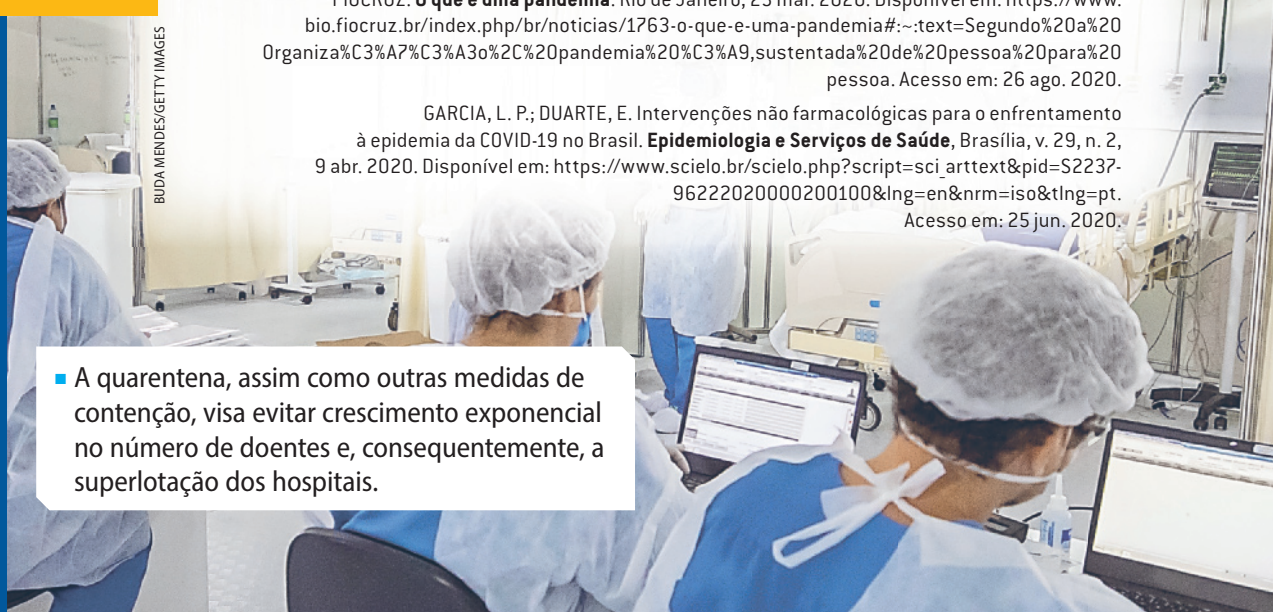
No final de 2019, foram detectados muitos casos de pneumonia com causa desconhecida na cidade de Wuhan, China. Após estudos, os médicos confirmaram que se tratava de um novo vírus: o SARS-CoV-2 (sigla em inglês para Severe Acute Respiratory Syndrome Coronavirus 2), que causa a covid-19 (Coronavirus Disease 19).

Por ser altamente contagioso, transmitindo-se por contato direto ou proximidade com pessoas e objetos infectados, o vírus se espalhou por todo o território chinês. Em poucos meses, o mundo estava sofrendo com uma pandemia. Esta acontece, segundo a Organização Mundial da Saúde (OMS), quando uma epidemia ou surto local passa a afetar diferentes continentes, com transmissão sustentada de pessoa para pessoa. Dessa forma, vários países entraram em quarentena, com medidas de saúde pública com alcance individual (lavagem de mãos, uso de máscara e distanciamento social) e alcance comunitário (isolamento de pessoas infectadas e controle de aglomerações).

Fonte de dados: BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Ciência, Tecnologia, Inovação e Insumos Estratégicos em Saúde. **Diretrizes para diagnóstico e tratamento da covid-19.** Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://portalarquivos.saude.gov.br/images/pdf/2020/May/08/Diretriz-Covid19-v4-07-05.20h05m.pdf. Acesso em: 25 jun. 2020.

FIOCRUZ. **O que é uma pandemia**. Rio de Janeiro, 23 mar. 2020. Disponível em: https://www.bio.fiocruz.br/index.php/br/noticias/1763-o-que-e-uma-pandemia#:~:text=Segundo%20a%20Organiza%C3%A7%C3%A3o%2C%20pandemia%20%C3%A9,sustentada%20de%20pessoa%20para%20pessoa. Acesso em: 26 ago. 2020.

GARCIA, L. P.; DUARTE, E. Intervenções não farmacológicas para o enfrentamento à epidemia da COVID-19 no Brasil. **Epidemiologia e Serviços de Saúde**, Brasília, v. 29, n. 2, 9 abr. 2020. Disponível em: https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2237-96222020000200100&lng=en&nrm=iso&tlng=pt. Acesso em: 25 jun. 2020.



BUDA MENDES/GETTY IMAGES

A quarentena, assim como outras medidas de contenção, visa evitar crescimento exponencial no número de doentes e, consequentemente, a superlotação dos hospitais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

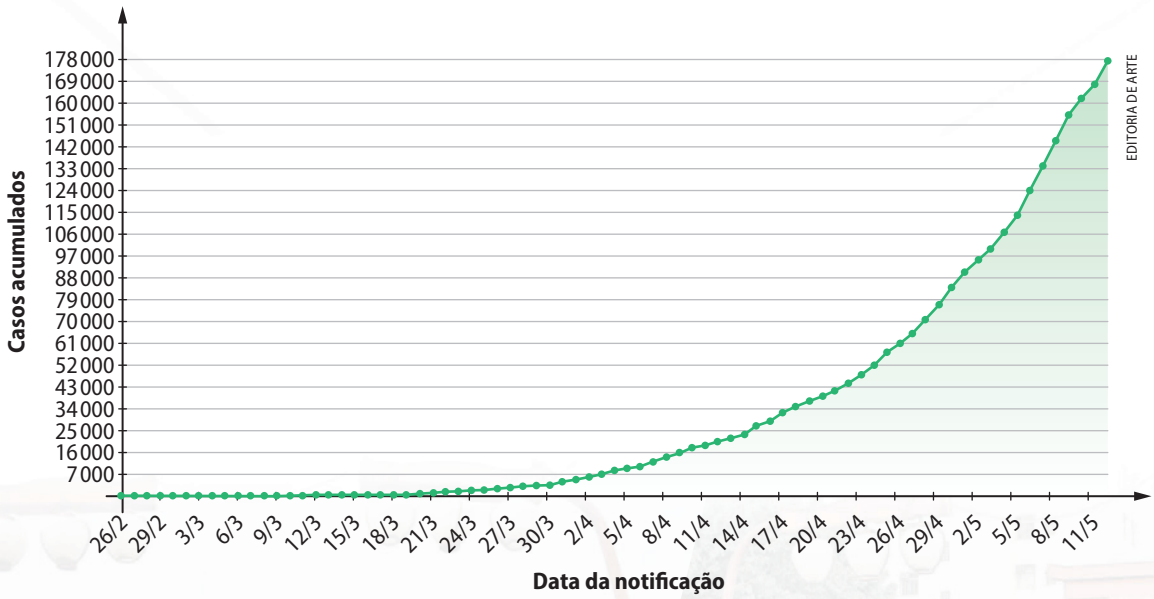
Ver as **Orientações para o professor**.

Agora reúna-se a um colega, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Pesquisem sobre que tipo de doença é a covid-19.
2. O que é pandemia? Qual é a importância de se manter uma quarentena para combater a covid-19? Se necessário, pesquisem sobre o tema.
3. Observem o gráfico de casos acumulados de covid-19 no Brasil por data de notificação e respondam:
   a) Vocês já viram um gráfico parecido com este? Descrevam, com suas palavras, o comportamento da curva desse gráfico.
   b) Esse tipo de gráfico apresenta crescimento linear? Expliquem.
4. Pesquisem a respeito das medidas de prevenção contra o coronavírus e comentem sobre qual ou quais medidas vocês acreditam que deveriam ser mantidas mesmo em casos que não há pandemia e por quê.

> **Casos acumulados de covid-19 por data de notificação**



EDITORIA DE ARTE

Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Vigilância em Saúde. **Painel Coronavírus**. Brasília, DF, 2020. Disponível em: https://covid.saude.gov.br/. Acesso em: 12 maio 2020.

NELSON ANTOINE/SHUTTERSTOCK.COM; VINICIUS BACARIN/SHUTTERSTOCK.COM; IMAGINEERING/SHUTTERSTOCK.COM

■ Fotografias do bairro da Liberdade, em São Paulo (SP). A fotografia da esquerda é de março de 2020, durante a quarentena implantada por causa do surto de covid-19. A da direita é de março de 2019.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

Nos iogurtes e em outros alimentos derivados do leite fermentado, há bactérias que colaboram para o equilíbrio da flora intestinal, evitando a proliferação de bactérias nocivas, melhorando a absorção de nutrientes e fortalecendo nosso sistema imunológico.

Apesar de esses alimentos serem benéficos, o consumo em excesso pode acarretar alguns efeitos indesejados em nosso organismo. Esses efeitos podem estar relacionados ao aumento do número de bactérias, que se reproduzem muito rapidamente.

Em geral, o crescimento de uma população de bactérias pode ser modelado por um tipo de função que estudaremos neste Capítulo: a função exponencial.

■ Diversos tipos de derivados do leite, entre eles o iogurte. No detalhe, micrografia de duas bactérias presentes no iogurte. Uma das bactérias tem formato arredondado e está colorizada em azul; a outra lembra um bastão rosado; em branco, o iogurte visto por meio do microscópio (imagem de microscopia eletrônica, aumento aproximado de 5 mil vezes; colorido artificialmente).

FÓRUM

Perda e desperdício de alimentos

Você já parou para pensar sobre esse tema? Leia o texto a seguir e faça o que se pede.

[...]

A redução da perda e do desperdício de alimentos pode trazer muitos benefícios: mais alimentos disponíveis para os mais vulneráveis; uma redução nas emissões de gases de efeito estufa; menos pressão sobre os recursos terrestres e hídricos; e aumento da produtividade e crescimento econômico.

[...]

Alimentos são perdidos quando são estragados ou derramados antes de chegar ao produto final ou ao varejo. Por exemplo, laticínios, carne e peixe podem estragar no trânsito devido ao transporte não refrigerado e às instalações de armazenamento refrigerado inadequados.

[...]

Os alimentos são desperdiçados quando são descartados pelos consumidores ou descartados no varejo devido à sua incapacidade de atender aos rígidos padrões de qualidade ou, muitas vezes, devido a um mal-entendido sobre a marcação da data no produto.

NAÇÕES UNIDAS BRASIL. **FAO lança plataforma para reduzir perda e desperdício de alimentos**. 14 ago. 2020. Disponível em: https://nacoesunidas.org/fao-lanca-plataforma-para-reduzir-perda-e-desperdicio-de-alimentos/. Acesso em: 17 ago. 2020.

• Reúna-se a mais dois colegas e pesquisem a respeito da perda e do desperdício de alimentos na sua região. O que empresas e pessoas podem fazer para combater essa prática? Depois, promovam um debate com a turma sobre como medidas para a redução da perda e do desperdício de alimentos pode contribuir para o cumprimento do objetivo 2 da Agenda 2030 da ONU.

Ver as **Orientações para o professor**.

Potenciação e radiciação

Antes de abordar o conteúdo de função exponencial, vamos retomar conhecimentos sobre **potenciação** e **radiciação**, que você provavelmente já estudou no Ensino Fundamental, pois serão essenciais no estudo desse tipo de função.

Potência com expoente natural

Acompanhe a seguir a definição de potenciação quando o expoente é um número natural.

Sendo a um número real e n um número natural, $n \geqslant 2$, definimos a potência de base a e expoente n como o produto dos n fatores iguais a a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Além disso:

- considerando a um número real, no caso em que $n = 1$, definimos $a^1 = a$.
- considerando a um número real não nulo, no caso em que $n = 0$, definimos $a^0 = 1$.

Exemplos:

a) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

b) $\left(\sqrt{2}\right)^1 = \sqrt{2}$

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^7 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{128}$

d) $(-3)^0 = 1$

Potência com expoente inteiro

Para estender o conceito de potência para expoentes inteiros, vamos definir o que significa uma potência de expoente inteiro negativo.

Sendo a um número real não nulo ($a \neq 0$) e n um número inteiro positivo, define-se:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Observe que a potência a^{-n} é o **inverso** de a^n. Exemplos:

a) $6^{-1} = \frac{1}{6}$

b) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3} = \frac{1}{\left(\frac{1}{64}\right)} = 64$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Propriedades da potenciação

É possível demonstrar que, dados a e b reais não nulos e m e n inteiros, são válidas as seguintes propriedades operatórias com expoentes inteiros.

1ª propriedade: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Exemplo: $3^4 \cdot 3^2 = (3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (3 \cdot 3) = 3^{4+2} = 3^6$

2ª propriedade: $\frac{a^m}{a^n} = a^m : a^n = a^{m-n}$

Exemplo: $\frac{4^5}{4^3} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4 \cdot 4} = 4^5$

$= 4^{5-3} = 4^2$

3ª propriedade: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Exemplo: $(6^2)^3 = 6^2 \cdot 6^2 \cdot 6^2 = 6^{2+2+2} = 6^6 = 6^{2 \cdot 3}$

4ª propriedade: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

Exemplo: $(5 \cdot 4)^3 = (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 4) \cdot (5 \cdot 4) = 5^3 \cdot 4^3$

5ª propriedade: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^3}{3^3}$

TARAPONG SIRI/SHUTTERSTOCK.COM

Notação científica

No meio científico, é comum nos depararmos com números muito grandes, como as distâncias entre os planetas, ou muito pequenos, como o tamanho de uma célula.

Quando queremos expressar essas grandezas, recorremos ao uso da **notação científica**, utilizando potências na base 10 para simplificar essas representações.

Sendo a um número real, tal que $1 \leq a < 10$ e n um número inteiro, a forma em notação científica de um número real não nulo é dada por:

$$a \cdot 10^n$$

PENSE E RESPONDA

Pesquise sobre o nanômetro e expresse 1 nanômetro, em metro, utilizando notação científica.

1 nanômetro $= 1 \cdot 10^{-9}$ metro

Exemplos:

a) O raio médio do Sol é de aproximadamente 696 000 000 metros; em notação científica, temos: 696 000 000 metros $= 6{,}96 \cdot 10^8$ metros (note que $n = 8$ e $a = 6{,}96$).

b) O diâmetro do átomo de hidrogênio é de aproximadamente 0,0000000001 metro; em notação científica, temos: 0,0000000001 metro $= 1{,}0 \cdot 10^{-10}$ metro (note que $n = -10$ e $a = 1{,}0$).

PARA ASSISTIR

A palavra **nano** pode significar pequeno, muito pequeno. Quando nos referimos a medidas de comprimento, 1 nanômetro equivale a 1 milionésimo de milímetro ($1 \cdot 10^{-6}$ milímetro). Assista ao vídeo a seguir para saber mais. O QUE é a nanotecnologia? 2014. Vídeo (3min26s). Publicado pelo canal Study Inalberta. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=oHgN4jtieTg. Acesso em: 25 jun. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Radiciação

Antes de abordarmos o conteúdo de potência com expoente racional, vamos retomar a definição de raiz enésima e as propriedades da operação de radiciação.

Sendo a um número real não negativo e n um número natural não nulo, a raiz enésima de a é o número real não negativo b tal que $b^n = a$. Em símbolos, podemos escrever:

$$\sqrt[n]{a} = b \text{ se, e somente se, } b^n = a$$

Lê-se raiz enésima de a é igual a b.

Para n ímpar e a um número real negativo, a raiz enésima de a é o número real negativo b, tal que $b^n = a$.

Para n par e a um número real negativo, não podemos definir a raiz enésima real de a, pois não existe número real b, tal que $b^n = a$.

Exemplos:

a) $\sqrt[4]{16} = 2$ se, e somente se, $2^4 = 16$.

b) $\sqrt[2]{9} = 3$ se, e somente se, $3^2 = 9$.

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ se, e somente se, $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$.

d) $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$.

e) $\nexists\, b \in \mathbb{R}$, tal que $\sqrt[2]{-4} = b$.

Propriedades da radiciação

Sendo a e b números reais não negativos, m inteiro e n e p naturais não nulos, apresentamos as seguintes propriedades:

1ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{10}$

2ª propriedade:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{27^4} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^4 = 3^4 = 81$

3ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$$

Exemplo: $\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[4 \cdot 3]{7} = \sqrt[12]{7}$

4ª propriedade:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}} \text{ e } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$$

Exemplo: $\sqrt[4]{6^3} = \sqrt[4 \cdot 5]{6^{3 \cdot 5}} = \sqrt[20]{6^{15}}$

e $\sqrt[20]{6^{15}} = \sqrt[20:5]{6^{15:5}} = \sqrt[4]{6^3}$

5ª propriedade:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Exemplo: $\sqrt[3]{\frac{125}{8}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5}{2}$

TARAPONG SIRI/SHUTTERSTOCK.COM

Potência com expoente racional

Para compreendermos melhor o conceito de potência com expoente racional, vamos definir o significado de uma potência com expoente fracionário, sendo o numerador inteiro e o denominador natural diferente de 0.

Se a é um número real positivo, m inteiro e n natural não nulo, define-se:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

a) $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$ **b)** $13^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{13^2}$ **c)** $\sqrt{21} = 21^{\frac{1}{2}}$ **d)** $\sqrt[4]{16^3} = 16^{\frac{3}{4}}$

Observação:

As potências com expoente racional têm as mesmas propriedades operatórias que as potências com expoente inteiro.

Exemplo:

$8^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{(4096)} = 16$ ou $8^{\frac{4}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{4}{3}} = 2^{3 \cdot \frac{4}{3}} = 2^4 = 16$.

Potência com expoente real

Para estudarmos o conteúdo de potência com expoente real, vamos ver como calcular o valor de uma potência com expoente irracional.

Por exemplo, como calcular $10^{\sqrt{2}}$?

Para responder a essa pergunta, vamos considerar, inicialmente, aproximações racionais de $\sqrt{2}$ por falta, tomando os valores 1,4; 1,41; 1,414; ... e, por excesso, tomando os valores 1,5; 1,42; 1,415; ...

Usando uma calculadora científica, vamos listar alguns resultados e obter a melhor aproximação para $10^{\sqrt{2}}$.

n	10^n
1,4	25,11886432
1,41	25,70395783
1,414	25,94179362
1,4142	25,95374301
1,41421	25,95434062
1,414213	25,95451991
⋮	⋮

n	10^n
1,5	31,62277660
1,42	26,30267992
1,415	26,00159563
1,4143	25,95971977
1,41422	25,95493825
1,414214	25,95457967
⋮	⋮

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

De acordo com os resultados obtidos nos dois quadros, uma aproximação racional para $10^{\sqrt{2}}$ com quatro casas decimais é 25,9545.

$$25{,}95451991 < 10^{\sqrt{2}} < 25{,}95457967$$

Continuando esse processo, podemos encontrar uma aproximação racional para $10^{\sqrt{2}}$ com quantas casas decimais se deseje.

Sendo a um número real positivo e x um número irracional, podemos obter aproximações racionais para o valor de a^x, com quantas casas decimais quisermos, atribuindo a x valores aproximados por falta e por excesso.

Para potências com expoente irracional, valem as mesmas propriedades operatórias das potências com expoente inteiro.

Exemplos:

a) $\left(10^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 10^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 10^2 = 100$

b) $2^{\pi}\cdot 2^{3\pi} = 2^{\pi+3\pi} = 2^{4\pi}$

c) $9^{3\sqrt{5}} : 9^{\sqrt{5}} = 9^{3\sqrt{5}-\sqrt{5}} = 9^{2\sqrt{5}}$

d) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{3}} = \frac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$

Calculando com o auxílio de uma calculadora

Geralmente, as calculadoras mais simples possuem a tecla $\sqrt{\ }$. Com ela, podemos calcular a raiz quadrada de um número real maior do que ou igual a 0. Por exemplo: para calcular $\sqrt{2}$, pressionamos $\sqrt{\ }$ 2 = e obtemos 1,414213562.

Agora, para calcular outras potências quaisquer, diferentes de $a^{\frac{1}{2}}$, será necessário utilizar uma calculadora científica que possua a tecla ^. Em alguns modelos essa tecla aparece como y^x (com y representando a base da potência e x, o expoente) ou x^y (com x representando a base da potência e y o expoente). Por exemplo: para calcular 2^{10}, pressionamos 2 ^ 1 0 = e obtemos 1024.

Entre as diferentes opções que uma calculadora científica pode oferecer, estão:

- o cálculo de uma raiz enésima. Por exemplo: para calcular $\sqrt[7]{123}$, pressionamos 7 SHIFT $\sqrt[x]{\ }$ ^ 1 2 3 = e obtemos 1,988647795;
- a utilização do número irracional π. Por exemplo: para calcular $2^{4\pi}$, pressionamos 2 ^ (4 × SHIFT π EXP) = e obtemos 6 065,330793.

SAIBA QUE...

Os passos indicados e a quantidade de casas decimais em todos os exemplos podem variar ligeiramente dependendo do modelo da calculadora.

Observações:

A tecla SHIFT permite acionar as opções escritas, acima das teclas, na mesma cor da palavra *Shift*.

As teclas (e) devem ser utilizadas para indicar a ordem de cálculo das operações e identificar corretamente os termos de uma expressão a serem considerados.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Calcule o valor de $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

Resolução

Decompondo o número 243 em fatores primos obtemos $243 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$.

Logo, $243 = 3^5$.

Então:

$$\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(\frac{1}{3^5}\right)^{-\frac{2}{5}}$$

Como o expoente é negativo, aplicamos a definição $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$:

$$\left(\frac{1}{3^5}\right)^{-\frac{2}{5}} = \left(3^5\right)^{\frac{2}{5}}$$

Aplicando a propriedade $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, obtemos: $\left(3^5\right)^{\frac{2}{5}} = 3^{5 \cdot \frac{2}{5}} = 3^2 = 9$

Portanto, $\left(\frac{1}{243}\right)^{-\frac{2}{5}} = 9$.

2. Aplicando as propriedades da potenciação, calcule $(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10}$.

Resolução

Usando as propriedades, temos:

$$(5^3 \cdot 5^6) : 5^{10} = 5^{3+6} : 5^{10} = 5^9 : 5^{10} = 5^{9-10} = 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

3. Simplifique a expressão $\frac{(0{,}1)^5 \cdot (0{,}01)^4 \cdot 100}{(0{,}001)^3}$.

Resolução

Substituindo os números decimais por frações decimais e aplicando as propriedades de potências, temos:

$$\frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^4 \cdot 100}{\left(\frac{1}{1000}\right)^3} = \frac{\left(\frac{1}{10}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{10^2}\right)^4 \cdot 10^2}{\left(\frac{1}{10^3}\right)^3} =$$

$$= \frac{\left(10^{-1}\right)^5 \cdot \left(10^{-2}\right)^4 \cdot 10^2}{\left(10^{-3}\right)^3} = \frac{10^{-5} \cdot 10^{-8} \cdot 10^2}{10^{-9}} =$$

$$= \frac{10^{-5-8+2}}{10^{-9}} = \frac{10^{-11}}{10^{-9}} = 10^{-11} \cdot 10^9 =$$

$$= 10^{-11+9} = 10^{-2} = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

4. (PUCCamp-SP) Efetuando-se $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}}$, obtém-se:

a) $\frac{\sqrt[3]{14}+2}{5}$ **d)** $\frac{4}{5}$

b) $\frac{\sqrt[3]{114}}{5}$ **e)** $\frac{3}{5}$

c) $\frac{6}{5}$

Resolução

Resolvendo as operações e aplicando as propriedades da radiciação, temos:

$$\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{15-11}{25}}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{4}{25}}} = \sqrt[3]{\frac{14}{125} + \frac{2}{5}} = \sqrt[3]{\frac{14+50}{125}} =$$

$$= \sqrt[3]{\frac{64}{125}} = \frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{4}{5}$$

Logo, $\sqrt[3]{\frac{14}{125} + \sqrt{\frac{3}{5} - \frac{11}{25}}} = \frac{4}{5}$.

A resposta correta é a alternativa **d**.

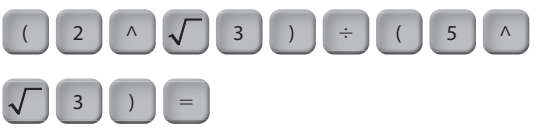
5. Utilize uma calculadora científica e determine valores reais aproximados para $9^{2\sqrt{5}}$ e $\frac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$.

Resolução

Para calcular $9^{2\sqrt{5}}$, pressionamos

e obtemos 18 514,08427.

Para calcular $\frac{2^{\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}}}$, pressionamos



e obtemos 0,204525605.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Calcule:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3$ $\frac{1}{64}$

b) $(-1{,}2)^2$ 1,44

c) $(-0{,}1)^2$ 0,01

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ $\frac{16}{81}$

2. f) $\sqrt{3^{-1}}$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 0,577

2. Escreva, no caderno, sob a forma de radical as potências a seguir. Depois, com o auxílio de uma calculadora, calcule seu valor com aproximação de 3 casas decimais. $\sqrt[4]{\pi}$; 1,331

a) $5^{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[4]{5^3}$; 3,344

b) $10^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{10}$; 3,162

c) $2^{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{2}$; 1,260

d) $3^{0{,}25}$ $\sqrt[4]{3}$; 1,316

e) $\pi^{\frac{1}{4}}$

f) $3^{-\frac{1}{2}}$

3. Aplicando as propriedades gerais das potências, reduza a uma só potência:

a) $3^4 \cdot 3^5$ 3^9

b) $(x^3)^4$ x^{12}

c) $7^9 \cdot 7^4$ 7^{13}

d) $\frac{10^{12}}{10^5}$ 10^7

e) $(10^3)^2$ 10^6

f) $a^{n+1} \cdot a^{n-2}$ a^{2n-1}

4. Escreva, no caderno, os números abaixo na forma de potência com expoente inteiro negativo. Considere $a \neq 0$.

a) $\frac{1}{3^2}$ 3^{-2}

b) $\frac{1}{10^4}$ 10^{-4}

c) $\frac{1}{2^5}$ 2^{-5}

d) $\frac{1}{6^2}$ 6^{-2}

e) $\frac{1}{2}$ 2^{-1}

f) $\frac{1}{a^2}$ a^{-2}

5. Usando uma calculadora, calcule com aproximação de 3 casas decimais.

a) $5^{1,5}$ 11,180

b) $12^{\frac{1}{4}}$ 1,861

c) $28^{0,25}$ 2,300

d) $3^{4,5}$ 140,296

e) $2^{2,6}$ 6,063

f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{1,25}$ 1,894

g) $3^{\sqrt{5}}$ 11,665

h) $10^{\sqrt{3}}$ 53,957

6. Efetue:

a) $(2{,}0 \cdot 10^3) \cdot (4{,}0 \cdot 10^{-5})$ $8 \cdot 10^{-2}$

b) $(5{,}2 \cdot 10^6) : (1{,}3 \cdot 10^{-3})$ $4 \cdot 10^9$

c) $(1{,}5 \cdot 10^3) \cdot (2{,}0 \cdot 10^{-5}) \cdot (4{,}0 \cdot 10^{-8})$ $1{,}2 \cdot 10^{-9}$

7. (Unicamp-SP) $a = 27$; $b = -8$; $c = \frac{1}{9}$; $d = -\frac{1}{8}$

a) Calcule as seguintes potências: $a = 3^3$, $b = (-2)^3$, $c = 3^{-2}$ e $d = (-2)^{-3}$.

b) Escreva os números a, b, c e d em ordem crescente. $-8; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; 27$

8. Qual é a metade de 2^{2012}? 2^{2011}

9. Determine o número que representa a expressão:

$(4^{x+2} : 4^{x-2}) : (4^x : 4^{x-1})$. 64

10. Determine o valor da expressão $\frac{3^{12} - 3^{11} - 3^{10}}{3^{11} + 3^{10} + 3^{10}}$. 1

11. Sendo $A = 12^n$, com $78 \leqslant n \leqslant 155$, qual é o maior valor natural de n para que o algarismo das unidades de A seja 6? $n = 152$

12. Simplifique as expressões abaixo, utilizando as propriedades da potenciação.

a) $(27 \cdot 8)^{-\frac{1}{3}}$ $\frac{1}{6}$

b) $81^{\frac{7}{4}} \cdot 81^{-\frac{1}{2}}$ 3^5

c) $\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\frac{1}{4}$

d) $\frac{7^{4,3} \cdot 7^{-2,6}}{7^{-0,3}}$ 7^2

e) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}$ $\left(\frac{5}{2}\right)^2$

13. Ao resolver a expressão abaixo, cometeu-se um erro em uma das passagens. Descubra, corrija e dê a resposta correta. passagem 3; $5^2 = 25$

$5^{1+\sqrt{3}} : 5^{\sqrt{3}-1} = \frac{5^{1+\sqrt{3}}}{5^{\sqrt{3}-1}} =$ (passagem 1)

$= 5^{(1+\sqrt{3})-(\sqrt{3}-1)} =$ (passagem 2)

$= 5^{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-1} =$ (passagem 3)

$= 5^0 = 1$ (passagem 4)

14. (UFSM-RS) Determine o valor da expressão $\sqrt[3]{\frac{(60\,000)\cdot(0{,}00009)}{0{,}0002}}$. 30

15. (FEI-SP) Que número real representa a expressão $\frac{(0{,}1)^{-1} - (0{,}8)^0}{2\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}}$? $-\frac{1}{3}$

16. (Fuvest-SP) Sendo $x = \left(2^2\right)^3$, $y = 2^{2^3}$ e $z = 2^{3^2}$, qual é a potência que representa a expressão xyz? 2^{23}

17. (UFRGS-RS) Simplifique a expressão:

$\frac{10^{10} + 10^{20} + 10^{30}}{10^{20} + 10^{30} + 10^{40}}$ 10^{-10}

18. (PUC-SP) Escreva a expressão abaixo, em que $n \in \mathbb{Z}$, em sua forma mais simples:

$\frac{(2^{n-1} + 2^n + 2^{n+1}) \cdot (3^{n-1} + 3^n + 3^{n+1})}{6^n + 6^{n+1}}$ $\frac{13}{6}$

Função exponencial

Uma vez revisadas as propriedades básicas da potenciação e da radiciação, vamos agora estudar a **função exponencial**, que é um tipo de função real e cuja definição apresentamos a seguir.

> A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dada por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada função exponencial de base a.

Exemplos:

a) $f(x) = (2)^x$ **b)** $f(x) = (0{,}4)^x$ **c)** $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ **d)** $f(x) = \left(\sqrt{5}\right)^x$

Vamos entender a definição:

- Se $a < 0$, então $f(x) = a^x$ não estaria definida para todo x real. Por exemplo, supondo $a = -2$ e $x = \frac{1}{2}$, teríamos a potência $(-2)^{\frac{1}{2}}$ que não está definida em $\mathbb{R}$.
- Se $a = 1$, então $f(x) = a^x$ é uma função constante, pois: $f(x) = 1^x \Rightarrow f(x) = 1$ para todo x real.
- Se $a = 0$ e $x < 0$, a^x não está definida em $\mathbb{R}$.
- Se $a = 0$ e $x = 0$, $f(0) = 1$.
- Se $a = 0$ e $x > 0$, f é uma função constante igual a 0.

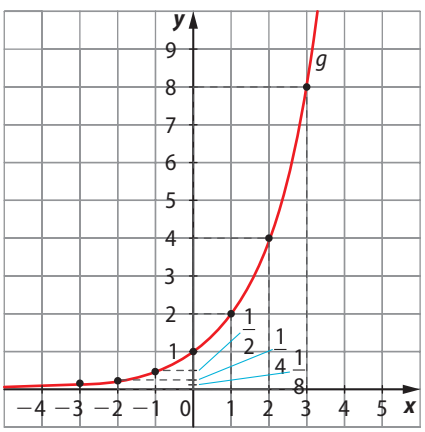
Gráfico da função exponencial

Vamos, agora, examinar o comportamento da função exponencial traçando seu gráfico no plano cartesiano. Observe os dois casos a seguir.

1º caso: $a > 1$

Veja o esboço do gráfico de $g(x) = 2^x$.

x	$g(x) = 2^x$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observe que os valores de 2^n aumentam conforme n natural aumenta. Essa característica pode ser observada sempre que $a > 1$.

De maneira geral, quanto maior o valor do expoente x, maior é a potência a^x, ou seja, se $a > 1$, a função $f(x) = a^x$ é crescente em todo o seu domínio (quando o valor de x cresce, o valor de a^x também cresce).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

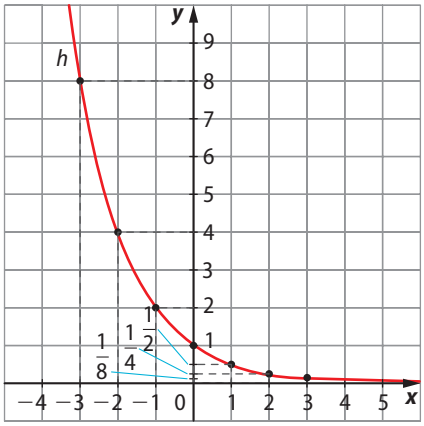
TATIANA53/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

2º caso: $0 < a < 1$

Veja o esboço do gráfico de $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

x	$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$



Observe que os valores de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ diminuem conforme n natural aumenta. Essa característica pode ser observada sempre que $0 < a < 1$.

De maneira geral, quanto maior o valor do expoente x, menor é a potência a^x, ou seja, se $0 < a < 1$, a função $f(x) = a^x$ é decrescente em todo o seu domínio (quando o valor de x cresce, o valor de a^x decresce).

A partir da definição da função exponencial, dada por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e da observação dos dois gráficos, temos:

- o domínio da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é $D(f) = \mathbb{R}$;
- o contradomínio da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é $CD(f) = \mathbb{R}_+^*$;
- o conjunto imagem da função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

Observação:

A função exponencial dada por $f(x) = a^x$ é injetora, pois quaisquer dois elementos distintos do seu domínio têm imagens distintas. Além disso, como todo elemento do contradomínio é imagem pela função de um elemento do domínio, essa função também é sobrejetora. Desse modo, podemos dizer que a função exponencial é **bijetora**.

SAIBA QUE...

As curvas dos gráficos das funções g e h se aproximam do eixo x, mas não o tocam e cruzam o eixo y no ponto $(0, 1)$.

PENSE E RESPONDA

Podemos dizer que os gráficos das funções g e h, representados em um mesmo sistema cartesiano, são simétricos com relação ao eixo y?

sim, pois $g(x) = h(-x)$ e $g(-x) = h(x)$

PARA OUVIR

MATEMÁTICA Multimídia: o que é exponencial? Entrevistador: Henrique Tavares. Entrevistado: Fernando Carreira. Campinas. *Podcast*. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1289. Acesso em: 18 ago. 2020.

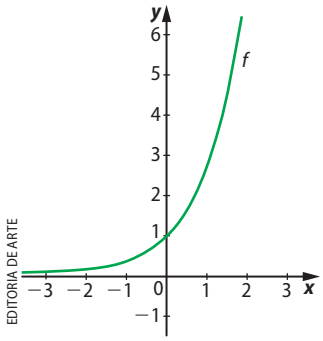
O programa "Que palavra é essa?" apresenta alguns verbetes utilizados na Matemática. Nesse programa, dividido em duas partes, é discutido o significado da palavra **exponencial** no contexto da Matemática.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A função $f(x) = e^x$

Vamos agora conhecer a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ definida por $f(x) = e^x$, que é uma função exponencial cuja base é o número e. Vários fenômenos das Ciências da Natureza podem ser modelados a partir dessa função e ela também é utilizada em diversas aplicações dentro da própria Matemática.

Veja a seguir como é o gráfico dessa função.



PENSE E RESPONDA

- Em que ponto o gráfico da função intersecta o eixo y?
- Qual é o valor de $f(1)$?

1; $f(1) = e$

SAIBA QUE...

O número e, conhecido como número de Euler, é um número irracional cujo valor é 2,718281... Leonhard Euler (1707-1783) adotou a letra e para representar a constante em 1736 em uma de suas obras.

O matemático John Napier (1550-1617) desenvolveu diversos trabalhos envolvendo esse número e, por isso, também é conhecido como número de Napier.

Note que o gráfico de f se aproxima bastante do eixo x, mas nunca o toca.

Para calcular valores da função $f(x) = e^x$ podemos usar uma calculadora científica, que tem um botão específico para isso. Em geral, essa função fica na mesma tecla da função ln, mas usando o botão SHIFT. Por exemplo: para calcular e^2, pressionamos SHIFT e^x ln 2 = e obtemos 7,389056099...

Geralmente, as calculadoras científicas também oferecem uma opção que permite a utilização do número irracional e, sem necessidade de inserir uma aproximação racional. Por exemplo: para calcular $\frac{1}{e}$, pressionamos 1 ÷ ALPHA e^x ln = e obtemos 0,367879441...

PENSE E RESPONDA

Como podemos calcular $\frac{1}{e}$, utilizando outras teclas da calculadora científica?

Utilizando as teclas SHIFT ln (− 1) =.

Observação:

A tecla ALPHA permite acionar as opções escritas, acima das teclas, na mesma cor da palavra **ALPHA**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

6. (Unifei-SP) Sendo $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$ para $x \in \mathbb{R}$, pode-se afirmar que:

a) o gráfico de f intersecta o eixo x em apenas um ponto.

b) f é decrescente.

c) o conjunto imagem de f é dado por $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$.

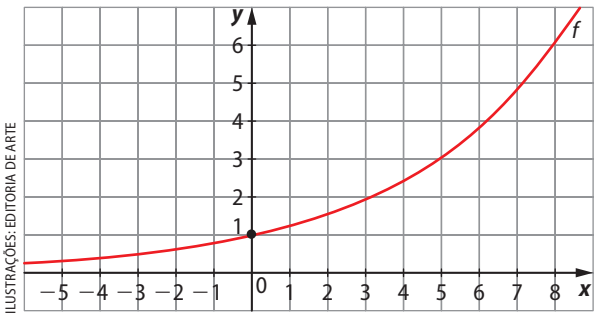
d) o gráfico de f intersecta o eixo y no ponto $\left(0, \frac{5}{4}\right)$.

e) $f(-1) = \frac{5}{4}$

Resolução

Vamos esboçar o gráfico da função $f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$. Como a > 1, a função é crescente.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^x$	$\frac{16}{25}$	$\frac{4}{5}$	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{25}{16}$



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Observamos que:

a) o gráfico de f não tem intersecção com o eixo x.

b) f é crescente.

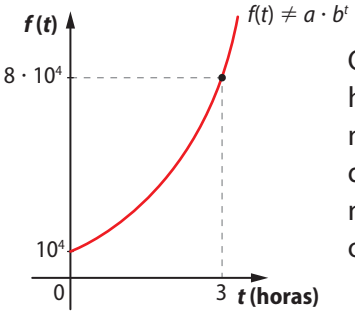
c) o conjunto imagem de f é $\text{Im}(f) =]0, +\infty[$.

d) o gráfico de f cruza o eixo y no ponto $(0, 1)$.

e) $f(-1) = \frac{4}{5}$

Portanto, a única afirmativa verdadeira é a correspondente à alternativa **c**.

7. O gráfico representado a seguir mostra a evolução do número de bactérias em certa cultura.



Quantas bactérias haverá aproximadamente nessa cultura decorridos 30 minutos do início das observações?

Resolução

A partir da observação do gráfico, verificamos que a função é do tipo $f(t) = a \cdot b^t$ e contém os pontos $(0, 10^4)$ e $(3; 8 \cdot 10^4)$.

Desta maneira:

- $f(0) = a \cdot b^0 = 10^4 \Rightarrow a = 10^4$
- $f(3) = a \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4 \Rightarrow a \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4$

Como $a = 10^4$, temos: $10^4 \cdot b^3 = 8 \cdot 10^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow b^3 = \frac{8 \cdot 10^4}{10^4} \Rightarrow b^3 = 8 \Rightarrow b = 2$

Portanto, $f(t) = 10^4 \cdot 2^t$.

Adotamos $t = \frac{1}{2}$ para descobrir a quantidade de bactérias após 30 minutos (meia hora) do início das observações: $f\left(\frac{1}{2}\right) = 10^4 \cdot 10^{\frac{1}{2}} =$

$= 10^4 \cdot \sqrt{2} \simeq 10^4 \cdot 1{,}41 \simeq 14100$

Assim, haverá aproximadamente 14 100 bactérias nessa cultura.

8. Utilize uma calculadora científica e encontre valores reais aproximados para 2^{4e} e $e^{\frac{3}{2}}$.

Resolução

Para calcular 2^{4e}, pressionamos [2] [^] [(] [4] [×] [ALPHA] [e^x e] [ln] [)] [=] e obtemos 1 875,588098.

Para calcular $e^{\frac{3}{2}}$, pressionamos [ALPHA] [e^x e] [ln] [^] [(] [3] [÷] [2] [)] [=] e obtemos 4,481689070.

PENSE E RESPONDA

Como podemos calcular $e^{\frac{3}{2}}$ utilizando outras teclas da calculadora científica?

Utilizando as teclas [Shift] [ln] [(] [3] [÷] [2] [)] [=].

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

19. Identifique como crescente ou decrescente as funções exponenciais definidas a seguir.

a) $f(x) = 5^x$ crescente

b) $f(x) = \left(\frac{1}{6}\right)^x$ decrescente

c) $f(x) = 2^{-x}$ decrescente

d) $f(x) = 3^{\frac{x}{2}}$ crescente

20. Esboce o gráfico das funções definidas a seguir. Depois, determine o domínio e a imagem de cada uma delas.

Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = 3^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

b) $f(x) = 2^{x+1}$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

c) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

d) $f(x) = 2^x + 1$ $D(f) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

21. Durante a aula de Matemática, o professor comentava sobre uma função que representava o crescimento de uma determinada bactéria e escreveu na lousa $f(t) = 2^t$, para $t \geqslant 0$, em que t é dado em horas e $f(t)$ em milhares de bactérias.

Um estudante distraído copiou $f(t) = 2t$ e, portanto, seus cálculos não deram certo.

a) Esboce os gráficos das duas funções em um mesmo sistema de coordenadas.

Ver as **Orientações para o professor**.

b) Observando os gráficos construídos no item **a**, existe algum valor de t para o qual as duas funções assumem valor igual? Se sim, qual(is)? sim, para $t = 1$ h e $t = 2$ h

c) O que você pode concluir sobre o crescimento dessas duas funções?

Para $t > 2$, o crescimento da função 2^t é maior.

d) Para $t = 3$ h, qual é a diferença entre o número de bactérias nas duas funções?

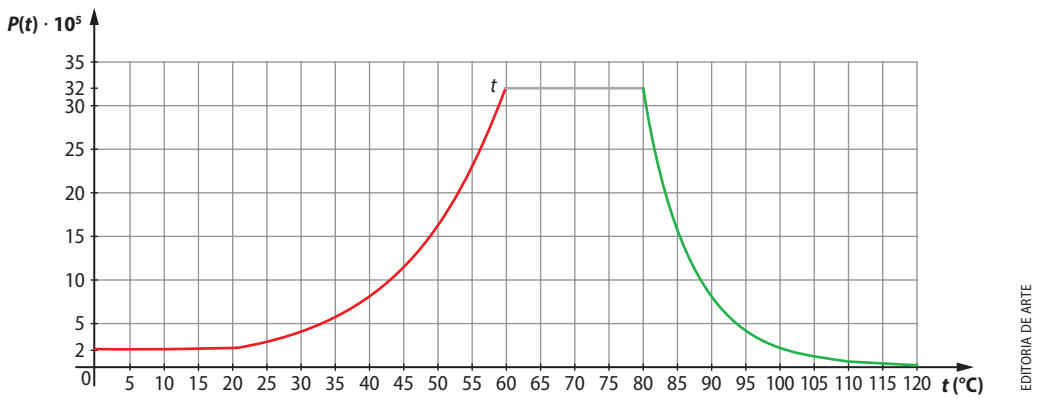
2 000 bactérias

22. Uma amostra de bactérias foi estudada quanto ao seu crescimento e decrescimento populacional P, em centenas de milhares, em relação ao aumento da temperatura t, em °C. Nesse experimento, a temperatura foi aumentada progressivamente, partindo de 0 °C e terminando em 120 °C, em um período de 24 horas. Veja a seguir a tabela e o gráfico que descrevem a variação populacional dessa amostra.

> Variação de uma população de bactérias em relação à temperatura

Temperatura (°C)	0	20	40	60	80	100	120
Quantidade de bactérias	$2 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$8 \cdot 10^5$	$32 \cdot 10^5$	$32 \cdot 10^5$	$2 \cdot 10^5$	$0{,}125 \cdot 10^5$

Fonte: Dados fictícios.



EDITORIA DE ARTE

a) Para quais intervalos de temperatura a população de bactérias estudada: aumentou, diminuiu ou se manteve estável?

Aumentou no intervalo entre 20 °C e 60 °C; diminuiu no intervalo entre 80 °C e 120 °C; manteve-se estável nos intervalos entre 0 °C e 20 °C e entre 60 °C e 80 °C.

b) Se o aumento da população de bactérias é dado por $f(t) = 2^{0{,}1(t-10)}$ e a diminuição por $g(t) = 32 \cdot 2^{-0{,}2(t-80)}$, calcule a quantidade aproximada de bactérias nessa amostra, quando a temperatura atingiu:

- 30 °C; 400 000 bactérias
- 50 °C; 1 600 000 bactérias
- 90 °C; 800 000 bactérias
- 110 °C. 50 000 bactérias

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

24. c) $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$ e $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+^*$

23. Para quais valores reais de k a função dada por $f(x) = (k - 3)^x$ é decrescente? $3 < k < 4$

24. Copie no caderno o quadro a seguir e complete-o, referente às funções definidas por $f(x) = 3^x$, $g(x) = 3^x + 2$ e $h(x) = 3^{x-2}$.

lei da função \ x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$g(x) = 3^x + 2$	$\frac{19}{9}$	$\frac{7}{3}$	3	5	11	29
$h(x) = 3^{x-2}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3

Agora, faça o que se pede:

a) Construa em um mesmo sistema cartesiano o gráfico de f, de g e de h. Ver as **Orientações para o professor**.

b) Ao analisar os gráficos construídos, podemos dizer que f, g e h são funções crescentes ou decrescentes? crescentes

c) Determine o domínio e o conjunto imagem dessas funções.

d) Sem construir, descreva como seria o gráfico da função dada por $m(x) = 3^x - 2$, em relação ao gráfico de f. Ver as **Orientações para o professor**.

e) Sem construir, descreva como seria o gráfico da função dada por $q(x) = 3^{x+2}$, em relação ao gráfico de f. Ver as **Orientações para o professor**.

25. Um banco possui taxa de rendimento na poupança de 0,35% ao mês. Um cliente que possui poupança nesse banco depositou R$ 1.000,00 no mês de janeiro e, ao longo de 6 meses, não realizou saques nem depositou quantia a mais. Conforme os dados da tabela, responda:

> Valor disponível em poupança após 6 meses de aplicação

Mês	Poupança (R$)
Janeiro	1.000,00
Fevereiro	1.000,00 · 1,0035 = 1.003,50
Março	1.003,50 · 1,0035 = 1.007,01
Abril	1.007,01 · 1,0035 = 1.010,53
Maio	1.010,53 · 1,0035 = 1.014,07
Junho	1.014,07 · 1,0035 = 1.017,62

Dados fictícios.

a) Qual é a taxa de variação média aproximada da poupança entre o sexto e o primeiro mês desse ano? R$ 3,52

b) Considerando que não houve saques nem depósitos nessa aplicação, determine a lei da função que representa o valor disponível em poupança em relação ao número de meses em que o capital inicial foi aplicado. $f(x) = 1.000 \cdot (1,0035)^x$

c) Quanto esse cliente terá aproximadamente na poupança após 12 meses sem realizar saques ou depósitos? R$ 1.042,82

d) Pelo item **b**, é possível perceber que a função escrita é uma função exponencial. Essa função é utilizada no estudo de **juro composto**. Nesse tipo de aplicação, a cada mês, o rendimento é aplicado sobre todo o montante disponível.

Quando a aplicação é feita sob o regime de **juro simples**, o rendimento é aplicado sobre o capital inicial. Se a aplicação do enunciado fosse com esse tipo de juro, a cada mês haveria um rendimento de R$ 3,50 (0,35% de R$ 1.000,00).

Com base nessas informações e utilizando uma planilha eletrônica, faça, em um único gráfico, a curva de evolução do valor disponível na poupança após 300 meses com um capital inicial de R$ 1.000,00 e rendimento de 0,35% ao mês considerando juro composto e uma curva, com os mesmos parâmetros, mas considerando juro simples.

Depois, faça uma análise da curva do primeiro caso e do segundo. O gráfico da curva do primeiro caso é característico de qual tipo de função? E o gráfico do segundo caso?

SAIBA QUE...

Quando uma pessoa deposita o dinheiro em uma poupança e deixa lá por algum tempo, dizemos que ela fez uma aplicação, recebendo juro por esse investimento. É como se o banco estivesse pagando pelo dinheiro emprestado.

25. d) Espera-se que os estudantes percebam que a aplicação sob regime de juro composto tem um crescimento muito maior do que a aplicação a juro simples. Além disso, espera-se que percebam que o primeiro gráfico se refere a uma função exponencial e o segundo, a uma função linear.

A base da potenciação e o gráfico da função exponencial

Você estudou que uma função exponencial dada por $f(x) = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$ é:

- crescente, se $a > 1$;
- decrescente, se $0 < a < 1$.

Agora vamos utilizar o **GeoGebra** para analisar a influência da base a da potenciação no gráfico da função exponencial.

Para isso, siga a sequência de passos abaixo:

I. No **Campo de entrada** do **GeoGebra**, digite "$f(x) = a \wedge x$" e pressione ***Enter***.

II. O programa irá criar um **Controle deslizante** para o coeficiente a. Para que o controle apareça na **Janela de visualização**, é necessário selecioná-lo.

III. O programa exibirá o gráfico da função f de acordo com o valor indicado no **Controle deslizante**. Ao ser criado, o controle aparece indicando $a = 1$. Movimente o **Controle deslizante** para alterar o valor de a e veja o que acontece com o gráfico de f. Observe que o valor indicado no controle representa o valor da base da função exponencial.

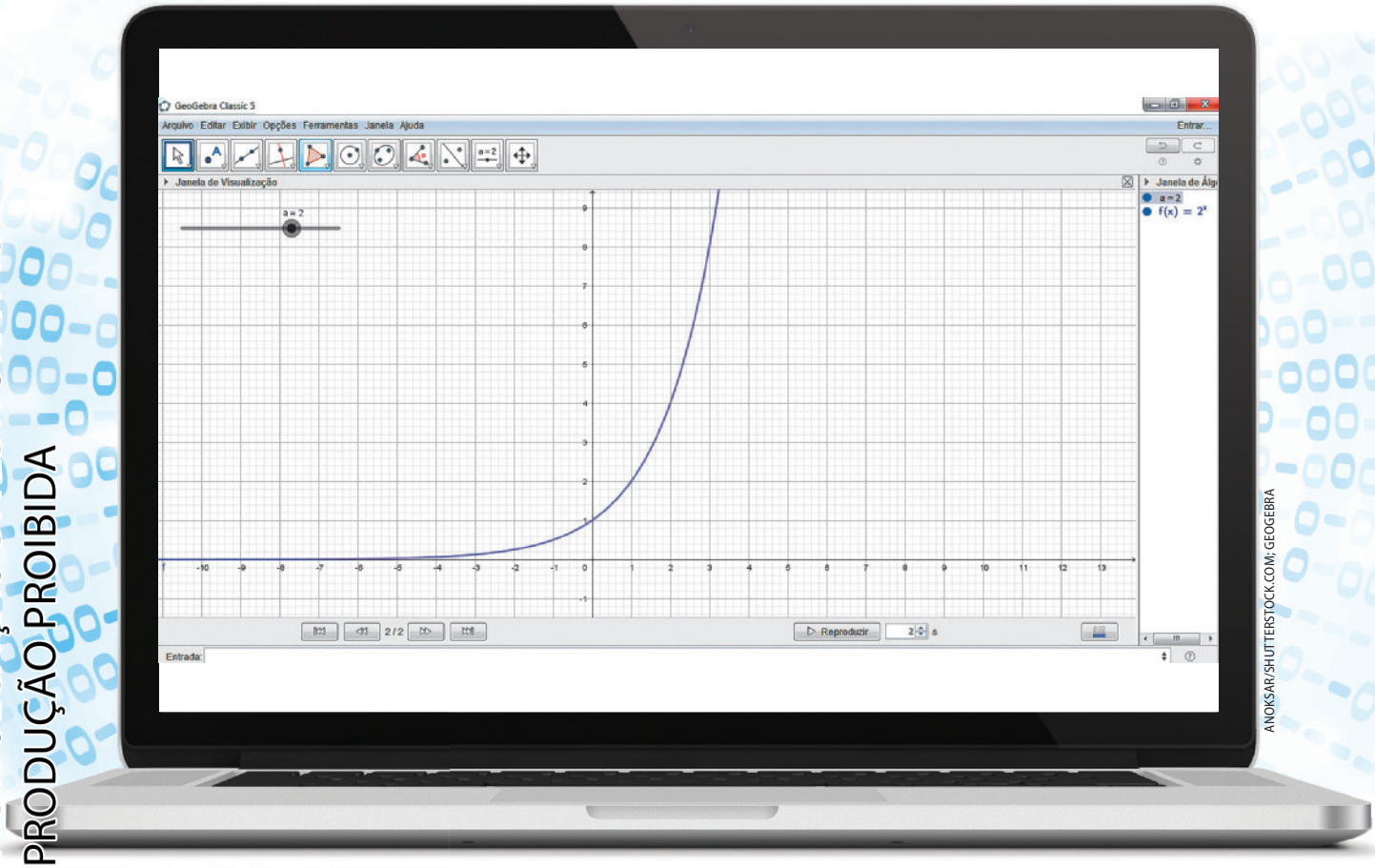
IV. Por padrão, o **Controle deslizante** criado pelo programa atende ao intervalo $[-5, 5]$. Para alterar esse intervalo, clique com o botão direito do *mouse* em cima do controle e, em seguida, em **Configurações**. Na aba **Controle deslizante**, altere os campos de **min:** e **max:** para os valores desejados e pressione ***Enter***. Em seguida, clique em **Fechar**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MAJCOT/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A tela do **GeoGebra** ficará semelhante à da figura abaixo.



ANOKSAR/SHUTTERSTOCK.COM; GEOGEBRA

Note que a função f tem valores muito próximos de zero, mas nunca assume o valor zero, ou seja, não existe x tal que $f(x) = 0$. Você pode conferir esse fato dando *zoom* na tela do **GeoGebra** para aproximar o gráfico e verificar que ele nunca encosta no eixo x. Para isso, basta movimentar o botão ***Scroll*** do *mouse* para a frente.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Movimente o **Controle deslizante** e altere o valor de a. Analise as alterações no gráfico e registre o que acontece em cada caso a seguir.

a) Para $a < 0$; Nenhum gráfico é exibido, pois $a < 0$ não é um valor válido para a na função.

b) Para $0 < a < 1$; O gráfico representa uma função decrescente.

c) Para $a = 1$; O gráfico é uma reta paralela ao eixo x, pois a função definida é a função constante dada por $f(x) = 1^x = 1$.

d) Para $a > 1$. O gráfico representa uma função crescente.

2. Repita o processo apresentado para a função definida por $g(x) = 2^{b \cdot x}$, agora, criando um **Controle deslizante** para o coeficiente b. Para isso, digite "$f(x) = 2 \wedge (b * x)$" no **Campo de entrada** e selecione o **Controle deslizante** que representa o coeficiente b. Altere o valor de b e analise o que acontece quando:

a) $b < 0$; Quanto menor o valor do expoente $b \cdot x$, menor é a potência $2^{b \cdot x}$ e a função é decrescente.

b) $b > 0$. Quanto maior o valor do expoente $b \cdot x$, maior é a potência $2^{b \cdot x}$ e a função é crescente.

Equações exponenciais

Toda equação cuja incógnita se apresenta no expoente de pelo menos uma potência de base real, positiva e diferente de 1, é denominada **equação exponencial**. Assim, são exemplos de equações exponenciais:

a) $2^x = 8$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 0{,}25$

c) $5^{2x} + 5^x = 30$

d) $9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1$

Vamos resolver as equações exponenciais nas quais ambos os membros da igualdade podem ser representados como potências de mesma base. Como a função exponencial, dada por $f(x) = a^x$, é injetora e sendo $a > 0$ e $a \neq 1$, vale a seguinte propriedade:

$$a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Por exemplo, para resolver a equação $2^x = 8$, escrevemos o segundo membro da equação como uma potência de base 2:

$$2^x = 8 \Rightarrow 2^x = 2^3$$

Aplicando a propriedade descrita, temos:

$$2^x = 2^3 \Rightarrow x = 3$$

Portanto, o conjunto solução da equação $2^x = 8$ é $S = \{3\}$.

Inequações exponenciais

Toda desigualdade que apresenta incógnita no expoente de, pelo menos, uma potência de base real, positiva e diferente de 1 é denominada **inequação exponencial**.

Exemplos:

a) $5^x < 1$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} > 4^x$

c) $10^x \geqslant -0{,}1$

d) $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \leqslant \frac{1}{32}$

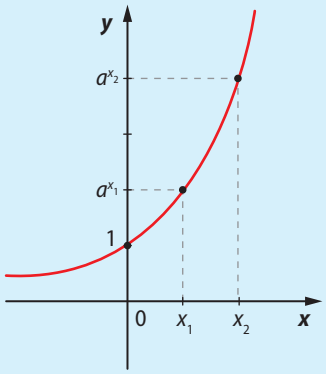
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Vamos resolver as inequações exponenciais nas quais ambos os membros da desigualdade podem ser representados como potências de mesma base. Com base no crescimento e no decrescimento da função exponencial, dada por $f(x) = a^x$, aplicamos as propriedades a seguir.

1º caso: $a > 1$ (função crescente)

Quando a base da potência é maior do que 1, a relação de desigualdade entre as potências se mantém entre os expoentes.



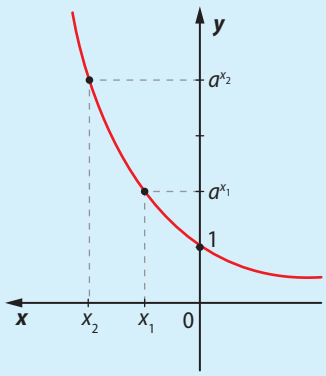
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$$

Conservamos o sentido da desigualdade.

2º caso: $0 < a < 1$ (função decrescente)

Quando a base da potência está entre 0 e 1, a relação de desigualdade entre as potências se inverte entre os expoentes.



$$a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$$

Invertemos o sentido da desigualdade.

TOSTPHOTO/SHUTTERSTOCK.COM

Radioatividade

Usinas nucleares para geração de energia e aparelhos de radioterapia para uso em medicina nuclear são algumas das aplicações da radioatividade. No entanto, elementos radioativos também podem ser matéria-prima para a produção de armamentos nucleares, que têm grande potencial de destruição. Para saber um pouco mais sobre o assunto, leia o texto a seguir sobre decaimento radioativo.

Radioatividade

O esquecimento de uma rocha de urânio sobre um filme fotográfico virgem levou à descoberta de um fenômeno interessante: o filme foi velado (marcado) por "alguma coisa" que saía da rocha, na época denominada raios ou **radiações**.

Outros elementos pesados, com massas próximas à do urânio, como o **rádio** e o **polônio**, também tinham a mesma propriedade.

O fenômeno foi denominado **radioatividade** e os elementos que apresentavam essa propriedade foram chamados de **elementos radioativos**.

Comprovou-se que um núcleo muito energético, por ter excesso de partículas ou de carga, tende a estabilizar-se, emitindo algumas partículas.

[...]

O lixo atômico

Os materiais radioativos produzidos em Instalações Nucleares (Reatores Nucleares, Usinas de Beneficiamento de Minério de Urânio e Tório, Unidades do Ciclo do Combustível Nuclear), Laboratórios e Hospitais, nas formas sólida, líquida ou gasosa, que não têm utilidade, não podem ser simplesmente "jogados fora" ou "no lixo", por causa das radiações que emitem. Esses materiais, que não são utilizados em virtude dos riscos que apresentam, são chamados de **Rejeitos Radioativos**.

Na realidade, a expressão "lixo atômico" é um pleonasmo, porque qualquer lixo é formado por átomos e, portanto, é **atômico**. Ele passa a ter essa denominação popular quando é radioativo.

Tratamento de rejeitos radioativos

Os rejeitos radioativos precisam ser tratados, antes de serem liberados para o meio ambiente, se for o caso. Eles podem ser liberados quando o nível de radiação é igual ao do meio ambiente e quando não apresentam toxidez química.

WIDEWEB/SHUTTERSTOCK.COM; SALVIT/SHUTTERSTOCK.COM

■ Em locais onde há presença de elementos radioativos, é obrigatório o uso de roupas especiais. Fotografia de Israel, 2017.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Rejeitos sólidos, líquidos ou gasosos podem ser, ainda, classificados, quanto à atividade, em rejeitos de baixa, média e alta atividade.

Os rejeitos de meia-vida curta são armazenados em locais apropriados (preparados), até sua atividade atingir um valor semelhante ao do meio ambiente, podendo, então, ser liberados. Esse critério de liberação leva em conta somente a atividade do rejeito. É evidente que materiais de atividade ao nível ambiental mas que apresentam toxidez química para o ser humano ou que são prejudiciais ao ecossistema não podem ser liberados sem um tratamento químico adequado.

Rejeitos sólidos de baixa atividade, como partes de maquinaria contaminadas, luvas usadas, sapatilhas e aventais contaminados, são colocados em sacos plásticos e guardados em tambores ou caixas de aço, após classificação e respectiva identificação. Os produtos de fissão, resultantes do combustível nos reatores nucleares, sofrem tratamento especial em **Usinas de Reprocessamento**, onde são separados e comercializados, para uso nas diversas áreas de aplicação de radioisótopos. Os materiais radioativos restantes, que não têm justificativa técnica e/ou econômica para serem utilizados, sofrem tratamento químico especial e são vitrificados, guardados em sistemas de contenção e armazenados em **Depósitos de Rejeitos Radioativos**.

[...]

CARDOSO, E. de M. **Apostila educativa**: radioatividade. Rio de Janeiro: CNEN. p. 5; 14-15. Disponível em: https://portalnuclear.cnen.gov.br/Material_didatico/apostilas/radio.pdf. Acesso em: 18 ago. 2020.

■ A radioatividade é utilizada em diversos exames diagnósticos, como a tomografia computadorizada.

ZOLTAN ACS/SHUTTERSTOCK.COM; LSTOCKSTUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. De acordo com o texto, a descoberta da radioatividade se deu a partir de um fato ocorrido com qual tipo de rocha? rocha de urânio

2. Os átomos de um elemento químico radioativo possuem naturalmente a tendência de se desintegrarem, emitindo partículas e se transformando em outro elemento. Desta maneira, com o passar do tempo, a quantidade original desse elemento diminui.

Suponha que uma certa quantidade de um elemento radioativo se decomponha conforme a função $M(t) = 50 \cdot 10^{\frac{-t}{70}}$, onde $M(t)$ é a quantidade de massa radioativa no tempo t (em anos).

a) Esboce o gráfico dessa função, identificando os pontos da função em que $t = 0$, $t = 35$ e $t = 70$.

b) A partir do gráfico esboçado, estime a quantidade de massa radioativa desse elemento, quando $t = 10$.

c) Verifique se a sua estimativa estava correta, calculando $M(10)$ com o auxílio da calculadora. Ver as **Orientações para o professor**.

3. As substâncias radioativas, ao atingirem a meia-vida, têm as suas massas iniciais reduzidas pela metade. Tomemos hoje 16 gramas de uma substância radioativa, cuja meia-vida é de 5 anos. A massa dessa substância é uma função do tempo, contado a partir de hoje, dada por $M(n) = 16 \cdot 2^{\frac{-n}{5}}$. Se daqui a n anos sua massa for 2^{-111} gramas, qual o valor de n? 575 anos

4. Reúna-se a mais dois colegas, e pesquisem alguns dos acidentes radioativos que marcaram a história. Quais foram as causas e consequências desses acidentes? pesquisa do estudante

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Uma pesquisa feita por biólogos de uma reserva florestal mostrou que a população de uma espécie de certo animal está diminuindo a cada ano. A partir do ano em que se iniciou a pesquisa, o número desses animais seguia a lei matemática $N = N_0 \cdot 3^{-0,05t}$, com t em anos ($t \geqslant 0$).

a) Calcule em quantos anos a população dessa espécie de animal estará reduzida à terça parte.

b) Qual era o número de animais dessa população quando a pesquisa foi iniciada, sabendo que após 80 anos restam apenas 12 indivíduos?

Resolução

a) Sendo N o número de animais no decorrer do tempo e $N_0 > 0$ o número de animais no início da pesquisa, podemos obter t resolvendo a equação:

$$N = \frac{N_0}{3} \Rightarrow \frac{N_0}{3} = N_0 \cdot 3^{-0,05t} \Rightarrow \frac{1}{3} = 3^{-0,05t} \Rightarrow \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,05t} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{0,05t}$$

Como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, concluímos que os expoentes são iguais. Assim:

$$0,05t = 1 \Rightarrow t = \frac{1}{0,05} \Rightarrow t = 20$$

Portanto, a população de animais será reduzida à terça parte após 20 anos.

b) Sabemos que para $t = 80$ temos $N = 12$. Assim, para obtermos N_0 basta substituirmos t e N na lei de formação da função.

$$N = N_0 \cdot 3^{-0,05t} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot 3^{-0,05 \cdot 80} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot 3^{-4} \Rightarrow 12 = N_0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \Rightarrow 12 = \frac{N_0}{81} \Rightarrow N_0 = 972$$

Portanto, havia 972 animais dessa espécie no início da pesquisa.

10. Resolva a equação $125^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}}$.

Resolução

Usando as propriedades de potências, vamos expressar o 1º e o 2º membros da equação como potências de mesma base.

$$125^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{625}} \Rightarrow (5^3)^{x+1} = \frac{1}{\sqrt[3]{5^4}} \Rightarrow 5^{3x+3} = 5^{-\frac{4}{3}}$$

Como as bases são iguais, positivas e diferentes de 1, podemos igualar os expoentes:

$$3x + 3 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \frac{9x+9}{3} = -\frac{4}{3} \Rightarrow 9x = -13 \Rightarrow x = -\frac{13}{9}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \left\{-\frac{13}{9}\right\}$.

11. Resolva a equação $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Resolução

Aplicando as propriedades de potência, vamos reescrever o termo 4^x na base 2:

$4^x = (2^2)^x = (2^x)^2$

Assim, podemos escrever a equação

$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ como $(2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Fazendo $2^x = y$, obtemos a equação do 2º grau na incógnita y:

$y^2 - 5y + 4 = 0$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Resolvendo essa equação, obtemos:

$\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 \Rightarrow \Delta = 9$

$y = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow y' = 4$ e $y'' = 1$

Voltando à igualdade $2^x = y$, temos:

- para $y = 4$, temos: $2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$;
- para $y = 1$, temos: $2^x = 1 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$.

Portanto, o conjunto solução da equação é $S = \{0, 2\}$.

12. Resolva a inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5}$.

Resolução

Como a base $\frac{1}{3}$ está compreendida entre 0 e 1, o sentido da desigualdade entre os expoentes se inverte:

$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x+5} \Rightarrow 3x - 1 > x + 5 \Rightarrow 2x > 6 \Rightarrow x > 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$.

13. Determine o conjunto solução da inequação $2^{2x+2} - 0{,}75 \cdot 2^{x+2} < 1$.

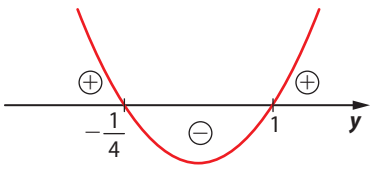
Resolução

Aplicando as propriedades de potências, temos:

$4 \cdot 2^{2x} - 0{,}75 \cdot 4 \cdot 2^x - 1 < 0$

Fazendo $2^x = y$, obtemos: $4y^2 - 3y - 1 < 0$.

Fazendo o estudo do sinal da função dada por $f(y) = 4y^2 - 3y - 1$, temos o gráfico ao lado.



Logo: $-\frac{1}{4} < y < 1$

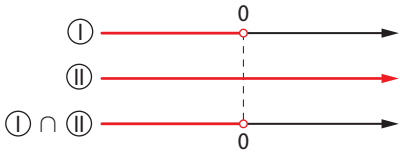
Lembrando que $2^x = y$, temos:

$2^x < 1 \Rightarrow 2^x < 2^0 \Rightarrow x < 0$ (I)

Como 2^x será sempre um número positivo, independentemente do valor de x, temos:

$2^x > -\frac{1}{4}$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (II)

Fazendo (I) ∩ (II), temos a representação ao lado:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$.

14. O valor de um automóvel daqui a t anos é dado pela função $V(t) = 40\,000 \cdot (0{,}8)^t$. Após quantos anos de uso o valor desse automóvel será menor do que R$ 20.480,00?

Resolução

Do enunciado, temos:

$V(t) < 20\,480 \Rightarrow 40\,000 \cdot (0{,}8)^t < 20\,480$

Resolvendo essa inequação, obtemos:

$40\,000 \cdot (0{,}8)^t < 20\,480 \Rightarrow (0{,}8)^t < \frac{20\,480}{40\,000} \Rightarrow (0{,}8)^t < \frac{512}{1\,000} \Rightarrow (0{,}8)^t < \frac{8^3}{10^3} \Rightarrow (0{,}8)^t < (0{,}8)^3$

Como as bases são iguais a 0,8, que é maior do que zero e menor do que 1, temos: $t > 3$.

Portanto, o valor do automóvel será menor do que R$ 20.480,00 após 3 anos de uso.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

26. Resolva as equações exponenciais a seguir:

a) $2^x = 64$ $S = \{6\}$

b) $10^x = 1000$ $S = \{3\}$

c) $9^x = 243$ $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{32}$ $S = \{5\}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = 0{,}25$ $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) $4^x = \frac{1}{64}$ $S = \{-3\}$

g) $3^x = \sqrt{3}$ $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

h) $4^x = \sqrt[3]{32}$ $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

27. Seja uma função definida por $f(x) = 5^{2x-1}$ com $x \in \mathbb{R}$. Determine x para que: $\nexists\, x \in \mathbb{R} \mid 5^{2x-1} = 0$

a) $f(x) = 125$ $x = 2$

b) $f(x) = 1$ $x = \frac{1}{2}$

c) $f(x) = 0$

d) $f(x) = \frac{1}{5}$ $x = 0$

28. Resolva as equações abaixo.

a) $2^{x-2} = \frac{8}{2^{x-3}}$ $S = \{4\}$

b) $25^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{5x-1}$ $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $5^{x^2-2} : 25 = \left(\frac{1}{125}\right)^{-x}$ $S = \{-1, 4\}$

d) $\sqrt[3]{81^x} = \frac{1}{27}$ $S = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$

29. Qual é a solução da equação $8^x + 8^{x-1} + 8^{x+1} = 292$ no universo $\mathbb{R}$? $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

30. Considere a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4^{x+1}$. Calcule o valor de x de modo que $f(2 - x) = 2 \cdot f(x)$. $x = \frac{3}{4}$

31. Qual é o valor de x na equação $\frac{2^x + 2^{2x}}{2^{2x} - 1} = 2$? 1

32. (UFRJ) Considere que num recipiente, no instante $t = 0$, um número N_0 de bactérias está se reproduzindo normalmente. É aceito cientificamente que o número de bactérias num certo instante $t > 0$ é dado pela equação

$$N(t) = N_0 K^t,$$

sendo $N(t)$ o número de bactérias no instante t e K uma constante que depende do tipo de bactéria. Suponhamos que, num certo instante, observou-se que havia 200 bactérias no recipiente reproduzindo-se normalmente. Passadas 12 horas, havia 600 bactérias. Após 48 horas do início da observação, quantas bactérias existirão? 16 200 bactérias

33. (Unicamp-SP) O processo de resfriamento de um determinado corpo é descrito por: $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$, onde $T(t)$ é a temperatura do corpo, em graus Celsius, no instante t, dado em minutos, T_A é a temperatura ambiente, suposta constante, e α e β são constantes. O referido corpo foi colocado em um congelador com temperatura de -18 °C. Um termômetro no corpo indicou que ele atingiu 0 °C após 90 minutos e chegou a -16 °C após 270 minutos.

a) Encontre os valores numéricos das constantes α e β. $\beta = -\frac{1}{90}$; $\alpha = 54$

b) Determine o valor de t para o qual a temperatura do corpo no congelador é apenas $\left(\frac{2}{3}\right)$ °C superior à temperatura ambiente. 360 minutos

34. (Cesgranrio-RJ) Segundo dados de uma pesquisa, a população de certa região do país vem decrescendo em relação ao tempo t, contado em anos, aproximadamente, segundo a relação $P(t) = P(0) \cdot 2^{-0{,}25t}$. Sendo $P(0)$ uma constante que representa a população inicial dessa região e $P(t)$ a população t anos após, determine quantos anos se passarão para que essa população fique reduzida à quarta parte da que era inicialmente. 8 anos

35. (Uespi-PI) Determine o conjunto solução da equação $2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 224$. $S = \{4\}$

36. (PUC-MG) Determine o valor de x para satisfazer a equação $3^{3x-1} \cdot 9^{2x+3} = 27^{3-x}$. $x = \frac{2}{5}$

37. (UFPR) Resolva a equação exponencial $1^x + 5^x + 25^x = 3$. $S = \{0\}$

38. Resolva a equação: $\frac{9^{5x-1}}{81^{2x-3}} = \frac{27^{5-3x}}{3^{2x-5}}$. $S = \left\{\frac{10}{13}\right\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

39. (UFAL) Devido à desintegração radioativa, uma massa m^0 de carbono 14 é reduzida a uma massa m em t anos. As duas massas estão relacionadas pela fórmula $m = m_0 \cdot 2^{\left(\frac{-t}{5\,400}\right)}$. Nessas condições, em quantos anos 5 g da substância serão reduzidos a 1,25 g? 10 800 anos

40. (ITA-SP) Dê o conjunto verdade da equação exponencial $3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2+1} - 8 \cdot 3^{x^2} = 0$. $S = \{-1, 1\}$

41. (ITA-SP) Resolva a equação

$$9^{x-\frac{1}{2}} - \frac{4}{3^{1-x}} = -1. \quad S = \{0, 1\}$$

42. (PUC-SP) Sejam $f(x) = 3^{x-1}$, $g(x) = 3^x$ e $s(x) = f(x) + g(x)$. Qual é o valor de x, tal que $s(x) = 4$? $x = 1$

43. (UFV-MG) Seja a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3^x$. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x + 1) + f(-x + 4) = 36$. $x = 2$ ou $x = 1$

44. (UFPB) Uma determinada indústria constatou que o gás expelido na fabricação dos seus produtos continha o poluente alfa em quantidade acima do recomendado, que é de no máximo 4 mg/L.
Visando resolver esse problema, instalou filtros para purificação do gás. Estudos mostram que, com esses filtros, a quantidade (q) do poluente alfa presente no gás, t horas após o processo de purificação ter sido iniciado, é dada por $q(t) = 2^{5-0,5t}$ mg/L. Com base nessas informações, identifique as afirmativas corretas:

I. A quantidade do poluente alfa presente no gás no instante em que o processo de purificação foi iniciado era de 32 mg/L. V

II. A quantidade do poluente alfa presente no gás, quatro horas após o início do processo de purificação, corresponde a um quarto da quantidade existente no instante em que o processo foi iniciado. V

III. A função utilizada para determinar a quantidade de poluentes no gás, $q(t)$, é crescente. F

IV. O tempo de purificação necessário para que a quantidade do poluente alfa presente no gás fique reduzida à metade da existente no instante em que o processo foi iniciado é de 2 horas. V

V. A quantidade do poluente alfa presente no gás estará conforme o recomendado a partir da 6ª hora após o instante em que o processo de purificação foi iniciado. V

I, II, IV e V

45. Uma represa utilizada como reservatório para o abastecimento de água de uma determinada região tem capacidade aproximada de 16 000 000 m³ num período de normalidade de chuvas. Após o início de um período de seca, a variação da quantidade de água desse reservatório passou a ser dada pela função $V(t) = V_0 \cdot 2^{-0,05t}$, sendo V_0 a capacidade da represa em um período de normalidade, t o número de meses de estiagem e $V(t)$ a quantidade de água nesse reservatório em m³ após t meses. Uma resposta possível: O reservatório terá a metade da sua capacidade após quantos meses de estiagem? 20 meses.

- Elabore uma questão com base nos dados do enunciado acima. Depois, troque a atividade criada por você com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confiram as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

46. Determine o conjunto solução das seguintes inequações:

a) $2^{x^2-3x} \geqslant \frac{1}{4}$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \frac{1}{27}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$

c) $(0,2)^{x-2} > 1$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

d) $2^{x+1} \cdot 4^{x-1} \leqslant \frac{1}{32}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{4}{3}\right\}$

e) $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{1+2x} > \left(\frac{27}{8}\right)^{4x+3}$ $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{6}{7}\right\}$

f) $(0,04)^{\frac{x^2-2x}{2}} \geqslant 0,008$ $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

47. Determine os valores reais de x que verificam a inequação $3^{x+1} + 3^{2+x} > 108$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

48. Para quais valores de x a expressão $\sqrt{2^x + 2^{x+1} - 12}$ representa um número real? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

49. Determine o domínio D da função definida por:

a) $f(x) = \sqrt{2^x - 2^{1-x}}$ $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b) $g(x) = \sqrt{(0{,}1)^{x^2-5x} - (0{,}1)^{-6}}$ $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

50. (UFRN) Considere as funções $f(x) = 2^x - 1$ e $g(x) = -x^2 + 4$ definidas para todo o número real x e $h(x) = f(x) \cdot g(x)$.

a) Calcule $h(-1) = f(-1) \cdot g(-1)$ e $h(1) = f(1) \cdot g(1)$. $h(-1) = -\frac{3}{2}$; $h(1) = 3$

b) Determine o conjunto dos números reais x tais que $h(x) < 0$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

51. Determine a solução da inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

52. Resolva em $\mathbb{R}$ a inequação $2^{1+x} + \sqrt{8} \geqslant \sqrt{72}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$

53. Quais valores inteiros de x satisfazem a desigualdade $1 < 4^{\frac{x}{4}} \leqslant 64$? $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

54. (UFAL) No universo $\mathbb{R}$, qual o conjunto solução da inequação $5^{x^2} \cdot 5^{2x-1} \cdot 5^{-3} \leqslant \frac{1}{5}$? $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$

55. Um botânico anotou diariamente o crescimento de uma planta e verificou que esse crescimento obedecia de maneira aproximada à uma função exponencial dada por $h(t) = 2{,}52 + 0{,}04 \cdot 3^{0{,}14t}$, em que t representa o número de dias aferidos, a partir do primeiro registro, e $h(t)$ indica a altura, em centímetro, da planta no dia t.

- Elabore uma questão com base nos dados do enunciado acima, utilizando as expressões **tempo mínimo** ou **tempo máximo**. Depois, troque a atividade criada por você com um colega e responda à questão elaborada por ele. Juntos, confiram as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

56. (Unimontes-MG) Todos os valores de x que satisfazem a inequação $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-\frac{3}{2}}$ estão no intervalo

a) [2, 4].
b)]1, 2].
c) [0, 2].
d)]1, 3[. alternativa **d**

57. (IFMG) A única afirmativa verdadeira é:

a) $16^{\frac{3}{4}} - 27^{\frac{2}{3}} = 1$

b) Se $\left(\sqrt{2}\right)^x = 64$, então $x = 12$.

c) A solução da inequação $\left(\frac{1}{3}\right)^x \leqslant 27$ é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -3\}$.

d) $\frac{99^{15}}{33^{30}} = 3^{-15}$ alternativa **b**

58. (EsPCEx-SP) A quantidade de números inteiros ímpares que pertencem ao intervalo que satisfaz a inequação exponencial $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4$ é de: alternativa **b**

a) um número ímpar.
b) dois números ímpares.
c) três números ímpares.
d) quatro números ímpares.
e) cinco números ímpares.

59. Determine o domínio da função dada por $f(x) = \sqrt{2^{x-2} - 1}$. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

60. (UFRN) Os modelos matemáticos que representam os crescimentos populacionais, em função do tempo, de duas famílias de microrganismos, B_1 e B_2, são expressos, respectivamente, por meio das funções $F_1(t) = t^2 + 96$ e $F_2(t) = 9 \cdot 2^t + 64$, para $t \geqslant 0$.
Com base nestas informações, é correto afirmar que:

a) após o instante $t = 2$, o crescimento populacional de B_1 é maior que o de B_2.
b) após o instante $t = 2$, o crescimento populacional de B_1 é menor que o de B_2.
alternativa **b**
c) quando t varia de 2 a 4, o crescimento populacional de B_1 aumenta 10% e o de B_2 aumenta 90%.
d) quando t varia de 4 a 6, o crescimento populacional de B_1 cresce 20 vezes menos que o de B_2.

55. Uma resposta possível: Qual é o tempo mínimo necessário para que a planta estudada atinja uma altura maior do que 90 cm? O tempo mínimo será de 50 dias.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (PUC-RJ) Se $(1,2)^{-\frac{1}{2}} = x$, quanto vale $x^2 + 1$?

a) 1 alternativa **b**

b) $\frac{11}{6}$

c) $\frac{6}{11}$

d) $\frac{10}{3}$

e) $-\frac{11}{6}$

2. (Unifor-CE) Simplificando a expressão $\frac{2^{6n} - 1}{2^{6n} + 2^{3n+1} + 1}$, na qual $n \in \mathbb{R}$, obtém-se: alternativa **e**

a) 0

b) 2^{3n}

c) $-\frac{1}{2^{3n}}$

d) $\frac{2^{3n} + 1}{2^{3n}}$

e) $\frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} + 1}$

3. (Uneb-BA) Se $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{256}{81}$ e $\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 729$, para x e y números reais, $y > 0$, então o valor de $y + 3x$ é alternativa **04**

01) 33

02) 48

03) 56

04) 69

05) 77

4. (IFMS) Um professor desafiou seus estudantes a resolverem a seguinte expressão:

$$\left(2^{-3,5} \times \sqrt{50}\right) + 0,125 + \frac{7}{28}$$

Assinale a alternativa que apresenta o resultado correto dessa expressão. alternativa **a**

a) 1

b) $\sqrt{2}$

c) 2^{-1}

d) 1,8

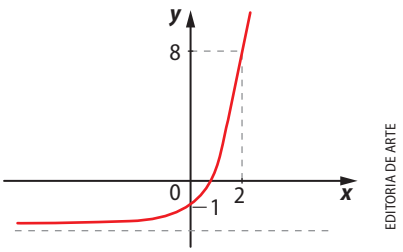
e) 2

5. (PUC-SP) Considere as funções $f(x) = 2^{x+k}$ e $g(x) = x^2 + m$, com k e m números inteiros. Se $f(1) = -2 + g(2)$ e $f(0) = g(0)$, o valor de $f(g(f(-1)))$ é

a) 4 **b)** 8 **c)** 12 **d)** 16

alternativa **d**

6. (AFA-SP) A função real f definida por $f(x) = a \cdot 3^x + b$, sendo a e b constantes reais, está graficamente representada abaixo.



EDITORIA DE ARTE

Pode-se afirmar que o produto $(a \cdot b)$ pertence ao intervalo real

a) $]-4, -1[$ alternativa **a**

b) $]-1, 2[$

c) $[2, 5[$

d) $[5, 8]$

7. (Enem/MEC) O governo de uma cidade está preocupado com a possível epidemia de uma doença infectocontagiosa causada por bactéria. Para decidir que medidas tomar, deve calcular a velocidade de reprodução da bactéria. Em experiências laboratoriais de uma cultura bacteriana, inicialmente com 40 mil unidades, obteve-se a fórmula para a população:

$$p(t) = 40 \cdot 2^{3t}$$

em que t é o tempo, em hora, e $p(t)$ é a população, em milhares de bactérias.

Em relação à quantidade inicial de bactérias, após 20 min, a população será alternativa **d**

a) reduzida a um terço.

b) reduzida à metade.

c) reduzida a dois terços.

d) duplicada.

e) triplicada.

8. (Uneb-BA) Uma panificadora utiliza fermento biológico no processo de industrialização de seus alimentos, de modo que seus produtos têm, a cada hora, o volume V aumentado em 20%.

Nessas condições, é correto afirmar que, em 2 horas, o volume de determinado alimento

01) cresceu pouco menos da metade. alternativa **01**

02) alcançou 1,8V.

03) dobrou.

04) atingiu 2,5V.

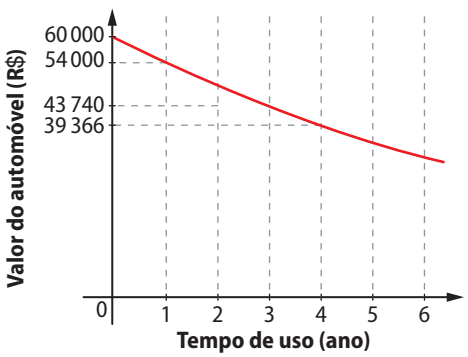
05) triplicou.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

9. (Unemat-MT) Certa substância se desintegra obedecendo à seguinte expressão: $Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t}$, em que t é o tempo (em horas), k é uma constante real e $Q(t)$ é a quantidade da substância (em gramas), no tempo t.
Considerando que no instante inicial, $t = 0$, a quantidade de substância é de 800 g, assinale a alternativa que corresponde ao tempo necessário para que a quantidade dessa substância esteja reduzida a 25% do seu valor inicial.

a) 2 h
b) 4 h alternativa **b**
c) 6 h
d) 8 h
e) 10 h

10. (Enem/MEC) Um modelo de automóvel tem seu valor depreciado em função do tempo de uso segundo a função $f(t) = b \cdot a^t$, com t em ano. Essa função está representada no gráfico.



Qual será o valor desse automóvel, em real, ao completar dois anos de uso?

a) 48 000,00
b) 48 114,00
c) 48 600,00 alternativa **c**
d) 48 870,00
e) 49 683,00

11. (Mack-SP) O valor de x na equação $\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27}$ é:

a) tal que $2 < x < 3$.
b) negativo.
c) tal que $0 < x < 1$.
d) múltiplo de 2. alternativa **d**
e) 3.

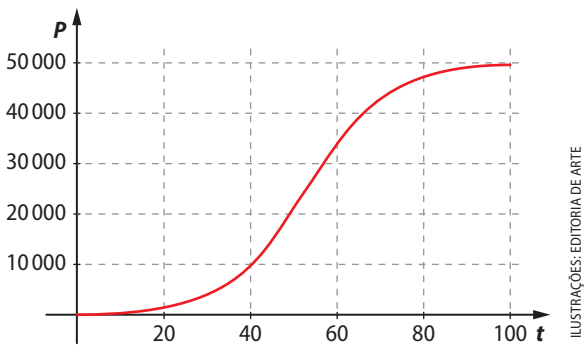
12. (UEL–PR) Se o número real k satisfaz à equação $3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$, então k^2 é igual a:

a) 0 ou $\frac{1}{2}$
b) 0 ou 1 alternativa **b**
c) $\frac{1}{2}$ ou 1
d) 1 ou 2
e) 1 ou 3

13. (UEL-PR) Os vírus dependem de uma célula hospedeira susceptível para se multiplicarem. Seja $e > 2$ uma constante real. Suponha que $P: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ represente a quantidade de partículas virais no interior de uma célula hospedeira no instante $t \geq 0$, de forma que

$$P(t) = \frac{5 \cdot 10^4}{1 + 200e^{\frac{-1}{10}t}}$$

O gráfico de P no intervalo $0 \leq t \leq 100$ é dado a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Com base no texto, na equação e no gráfico, atribua (V) verdadeiro ou (F) falso às afirmativas a seguir.

( ) De acordo com a função, o número de partículas virais nunca atinge $5 \cdot 10^4$.
( ) No instante inicial $t = 0$, existem 25 partículas virais dentro da célula.
( ) P é uma função decrescente.
( ) O número de partículas virais atinge 10.000 unidades antes do instante $t = 60$.
( ) A função $P: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é sobrejetora.

a) V, V, F, V, F.
b) V, F, F, V, F alternativa **b**
c) V, F, F, V, V.
d) F, V, V, F, F.
e) F, F, V, F, V.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

14. (IFPR) Alguns objetos de uso contínuo sofrem desvalorização comercial, devido ao uso e desgaste ao longo do tempo. Ao comprar uma moto, temos que o valor de venda $V(t)$ da mesma, em função do tempo t de uso em anos, é dado pela seguinte função: $V(t) = 10\,000 \cdot (0{,}9)^t$. Dessa forma, essa moto poderá ser vendida por R$ 8.100,00, após quanto tempo de uso?

a) 2 anos. alternativa **a**
b) 1 ano.
c) 18 meses.
d) 36 meses.

15. (EsPCEx-SP) Na pesquisa e desenvolvimento de uma nova linha de defensivos agrícolas, constatou-se que a ação do produto sobre a população de insetos em uma lavoura pode ser descrita pela expressão $N(t) = N_0 \cdot 2^{kt}$, sendo N_0 a população no início do tratamento, $N(t)$, a população após t dias de tratamento e k uma constante, que descreve a eficácia do produto. Dados de campo mostraram que, após dez dias de aplicação, a população havia sido reduzida à quarta parte da população inicial. Com estes dados, podemos afirmar que o valor da constante de eficácia deste produto é igual a:

a) 5^{-1}
b) -5^{-1} alternativa **b**
c) 10
d) 10^{-1}
e) -10^{-1}

16. (Vunesp-SP) Uma lagoa tem sofrido as consequências da poluição do ambiente e os pescadores reclamam, há muito tempo, da diminuição na quantidade de peixes. Após anos de denúncias, a prefeitura contratou, na última década, um pesquisador que vem acompanhando o desenvolvimento da vida aquática e da quantidade de peixes na lagoa. Após terminar suas experiências, ele concluiu que a quantidade n de peixes poderia ser calculada pela fórmula $n(T) = 10\,000 - 3^{\frac{T}{3}-2}$, sendo T o tempo, em anos, medido a partir deste exato momento. De acordo com esse pesquisador, o número de peixes será igual a 9 271 daqui a:

a) 15 anos
b) 18 anos
c) 24 anos alternativa **c**
d) 27 anos
e) 30 anos

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, revisamos as propriedades da potenciação e da radiciação e apresentamos as potências com expoente real. Vimos, também, que medidas muito grandes ou muito pequenas podem ser expressas em notação científica e que função, equações e inequações exponenciais são utilizadas para modelar o crescimento de uma população de bactérias, o decaimento de substâncias radioativas, além de outros fenômenos sociais e naturais.

Nas páginas de abertura, foram apresentadas imagens sobre a pandemia de covid-19 no Brasil com o intuito de utilizar a representação gráfica para compreender o avanço de uma doença. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual a importância dela? Se não, retome o texto de abertura do Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros, revistas, jornais e *sites* sobre a covid-19.

Vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **2**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual? Resposta pessoal.
- Cite exemplos de outras situações em que podemos utilizar notação científica para expressar medidas. Resposta pessoal.
- Como podemos obter a aproximação de uma potência com expoente real? Fazemos sucessivas aproximações com um expoente racional, por falta e por excesso, e tomamos um valor que se repita nos dois casos e que atenda à necessidade.
- Qual é a condição para que uma função exponencial seja crescente? E decrescente? base a maior do que 1; base a entre 0 e 1.
- Elabore um fluxograma sobre como calcular a raiz enésima de um número natural e potências do tipo e^x com o auxílio de uma calculadora científica. Resposta pessoal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

3

Função logarítmica

> A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 2, 7, 8, 9 e 10
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 1: EM13MAT103
  - Competência específica 3: EM13MAT304 e EM13MAT305
  - Competência específica 4: EM13MAT403
- **Competência específica da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

O som do despertador, nossa música favorita, a água corrente de um rio, os gritos de um torcedor fanático, o canto dos passarinhos, o avião que passa pelo céu... Todos os sons que ouvimos podem ser medidos.

Fazer essa medição é importante, pois nossa orelha é composta de várias partes, algumas delas bastante sensíveis. Se estivermos expostos a ruídos altos por muito tempo, por exemplo, podemos sofrer com a perda auditiva. Por isso, aparelhos como aspiradores de pó, liquidificadores e outros devem passar por testes que identifiquem a intensidade do ruído que geram.

No caso dos fones de ouvido o cuidado deve ser maior. O recomendável é que a intensidade sonora não ultrapasse o nível de 80 decibéis (uma unidade de medida da intensidade sonora), que é equivalente a uma sala de aula muito barulhenta. Alguns aparelhos celulares até alertam o usuário, quando conecta fones de ouvido, para que não ultrapasse certo volume e evite danos auditivos. Portanto, procure não ouvir sua música favorita sempre no último volume, porque a perda de audição por ruídos é uma realidade que está atingindo cada vez mais jovens com maus hábitos auditivos.

JENA ARDELL/MOMENT/GETTY IMAGES

Os *shows* musicais são eventos que costumam ter um alto nível de ruído.

Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item.
Ver as **Orientações para o professor**.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. No texto foi mencionada uma unidade de medida chamada de **decibel (dB)**. Façam uma pesquisa sobre essa unidade. Como ela se relaciona ao conteúdo que será estudado neste Capítulo?
2. Muitos aparelhos domésticos devem passar por testes para determinar a intensidade sonora que geram e, no Brasil, recebem o Selo Ruído. Informem-se sobre esse selo e deem alguns exemplos de aparelhos e equipamentos que precisam ser testados quanto aos ruídos que produzem.
3. Por que fones de ouvido podem ser mais prejudiciais à saúde sonora do que alto-falantes como os da televisão? Pesquisem sobre isso e sobre a Perda Auditiva Induzida por Ruídos (PAIR), suas principais causas e o grupo de pessoas mais atingido por esse problema.

PHOTOART YOSHIMI/SHUTTERSTOCK.COM

MERLA/SHUTTERSTOCK.COM

- Existem quatro tipos de fones de ouvido: auriculares, intra-auriculares, supra-auriculares (foto) e circumaural.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

JRJFIN/SHUTTERSTOCK.COM

Decibelímetro digital. Instrumento utilizado para medir o nível de intensidade sonora em um ambiente.

No Capítulo anterior, aprendemos como solucionar um tipo de equação cuja incógnita se apresenta no expoente, as equações exponenciais. Por exemplo, $2^x = 4$.

Naquela ocasião, vimos como solucionar esse tipo de equação quando ambos os membros da igualdade podem ser representados como potências de mesma base. Por exemplo:

$$2^x = 4 \Rightarrow 2^x = 2^2 \Rightarrow x = 2$$

Mas e quando os membros da igualdade não podem ser representados como potência de mesma base? Como fazemos para resolver uma equação como $2^x = 3$?

Para solucionar uma equação como essa, utilizamos o conceito de **logaritmo**.

Esse conceito é amplamente utilizado no estudo de fenômenos físicos, químicos, biológicos e sociais. Por exemplo, o cálculo da acidez de uma solução (conhecida como pH), o crescimento populacional, o nível de intensidade sonora (medido em decibel) etc.

SAIBA QUE...

O termo logaritmo tem origem nas palavras gregas *logos* (palavra/razão) e *arithmos* (número).

Logaritmo

Considerando uma potência cuja base seja um número positivo e diferente de 1, seu expoente é um logaritmo. Por exemplo, no caso da potência $2^5 = 32$, chamamos o expoente 5 de logaritmo de 32 na base 2. Usando a linguagem matemática, representamos:

$2^5 = 32 \Leftrightarrow \log_2 32 = 5$ (lê-se: logaritmo de 32 na base 2 é igual a 5)

Veja a seguir a definição de logaritmo.

> Dados dois números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, o logaritmo de b na base a é o expoente x tal que $a^x = b$:
> $$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b.$$

Na definição, b é o **logaritmando**, a é a **base** e x é o **logaritmo** de b na base a.

Exemplos:

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_2 \frac{1}{4} = -2 \Leftrightarrow 2^{-2} = \frac{1}{4}$

c) $\log_{\frac{1}{6}} \frac{1}{36} = 2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Propriedades do logaritmo

A partir da definição de logaritmo, ficam estabelecidas as propriedades apresentadas a seguir.

Sendo a, b, c e m números reais, em que a, b e c são positivos e a é diferente de 1, temos:

1ª propriedade: $\log_a 1 = 0$

Pois $\log_a 1 = x \Leftrightarrow a^x = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^x = a^0 \Leftrightarrow x = 0$.

2ª propriedade: $\log_a a = 1$

Pois $\log_a a = x \Leftrightarrow a^x = a \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^x = a^1 \Leftrightarrow x = 1$.

3ª propriedade: $\log_a a^m = m$

Pois $\log_a a^m = x \Leftrightarrow a^x = a^m \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = m$.

4ª propriedade: $a^{\log_a b} = b$

Pois, fazendo $\log_a b = x$, temos: $a^x = b$.

Substituindo x por $\log_a b$ em $a^x = b$, obtemos: $a^{\log_a b} = b$.

5ª propriedade: $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$

Pois, considerando $\log_a b = x$ e $\log_a c = y$, temos: $a^x = b$ e $a^y = c$.

Se $b = c$, temos: $a^x = a^y \Rightarrow x = y \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a b = \log_a c$.

Se $\log_a b = \log_a c$, temos: $x = y \Rightarrow$
$\Rightarrow a^x = a^y \Rightarrow b = c$.

TARAPONG SIRI/SHUTTERSTOCK.COM

Observações:

- O logaritmo de um número na base 10 é chamado de **logaritmo decimal**.

  Costumamos omitir a base dos logaritmos decimais. Assim:

  $\log_{10} b$ pode ser escrito como $\log b$.

  A base decimal é muito usada pelo fato de ser a mesma base do nosso sistema de numeração. Em muitos casos, utilizar o logaritmo decimal pode simplificar os cálculos.

- O logaritmo de um número na base e é chamado de **logaritmo natural** ou **logaritmo neperiano** (em homenagem a John Napier, que conheceremos na página 98).

  Os logaritmos naturais possuem uma simbologia própria:

  $\log_e b$ pode ser escrito como $\ln b$.

  A base natural é muito utilizada na modelagem de fenômenos das ciências da natureza e das ciências humanas.

Condições de existência do logaritmo

De acordo com a definição de logaritmo, a existência de $\log_a b$ está associada às seguintes condições:

- logaritmando positivo: $b > 0$;
- base positiva e diferente de 1: $a > 0$ e $a \neq 1$.

Se uma dessas condições não for atendida, a existência do logaritmo não estará garantida no universo dos números reais. Por exemplo, vamos tentar calcular $\log_2 (-3)$. De acordo com as condições de existência, verificamos que $\log_2 (-3)$ não é um número real, pois o logaritmando é negativo. Caso existisse esse logaritmo em $\mathbb{R}$, aplicando a definição, teríamos:

$$\log_2 (-3) = x \Leftrightarrow 2^x = -3$$

Note que não existe valor real de x que satisfaça à igualdade descrita.

FÓRUM

Poluição sonora

Estudos indicam que ruídos com intensidade acima de 80 dB são prejudiciais à orelha humana. Avião decolando, buzina, martelo pneumático, serra mecânica e máquina perfuradora são alguns exemplos de geradores de ruídos com intensidade acima desse limiar.

O crescimento das cidades deixou as pessoas cada dia mais vulneráveis a esses ruídos prejudiciais, de tal forma que a poluição sonora passou a ser uma constante na vida das pessoas e é vista como um dos problemas a serem combatidos nos grandes centros urbanos.

- Agora reúna-se a um colega e façam uma pesquisa sobre o tema **poluição sonora** para debater sobre quais atitudes pessoais e governamentais ajudariam a mitigar esse problema.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

TYLER OLSON/SHUTTERSTOCK.COM

Os funcionários de aeroportos que trabalham na pista precisam usar protetores auriculares como parte dos equipamentos de proteção individual (EPI) por conta do ruído das turbinas dos aviões.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES RESOLVIDAS

1. Calcule:

a) $\log_6 36$ **b)** $\log_{10} 0{,}01$ **c)** $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2}$

Resolução

Em cada item, vamos aplicar a definição de logaritmo e resolver a equação exponencial obtida.

a) $\log_6 36 = x \Leftrightarrow 6^x = 36$

$6^x = 36 \Rightarrow 6^x = 6^2 \Rightarrow x = 2$

Então, $\log_6 36 = 2$.

b) $\log_{10} 0{,}01 = x \Leftrightarrow 10^x = 0{,}01$

$10^x = 0{,}01 \Rightarrow 10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$

Então, $\log_{10} 0{,}01 = -2$.

c) $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^x = 2\sqrt{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2^2}\right)^x = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow (2^{-2})^x = 2^{1+\frac{1}{2}} \Rightarrow 2^{-2x} = 2^{\frac{3}{2}} \Rightarrow -2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{4}$

Então, $\log_{\frac{1}{4}} 2\sqrt{2} = -\frac{3}{4}$.

2. Calcule $\log_{10} 1{,}4$. Use $2 \simeq 10^{0{,}301}$ e $7 \simeq 10^{0{,}845}$.

Resolução

Usando a definição de logaritmo:

$\log_{10} 1{,}4 = x \Leftrightarrow 10^x = 1{,}4$

O logaritmo de 1,4 é o expoente x ao qual devemos elevar 10 para obter 1,4.

Resolvendo a equação exponencial, temos:

$10^x = 1{,}4 \Rightarrow 10^x = \frac{14}{10} \Rightarrow 10^x = \frac{2 \cdot 7}{10} \Rightarrow 10^x \simeq \frac{10^{0{,}301} \cdot 10^{0{,}845}}{10} \Rightarrow 10^x \simeq 10^{0{,}301 + 0{,}845 - 1} \Rightarrow$

$\Rightarrow 10^x \simeq 10^{0{,}146} \Rightarrow x \simeq 0{,}146$

Portanto, $\log_{10} 1{,}4 \simeq 0{,}146$.

3. Que número natural $\log_{10} (\log_{10} 10)$ representa?

Resolução

Pela 2ª propriedade, $\log_{10} 10 = 1$.

Então, pela 1ª propriedade, temos $\log_{10} (\log_{10} 10) = \log_{10} 1 = 0$.

Logo, a expressão $\log_{10} (\log_{10} 10)$ representa o número 0.

4. Determine o valor da expressão:

$\log_7 7^3 + \log_9 1^6 + 2^{\log_2 5}$

Resolução

Calculando o valor de cada parcela, temos:

- $\log_7 7^3 = 3$ (3ª propriedade)
- $\log_9 1^6 = \log_9 1 = 0$ (1ª propriedade)
- $2^{\log_2 5} = 5$ (4ª propriedade)

Substituindo esses valores na expressão dada, obtemos:

$3 + 0 + 5 = 8$

Portanto: $\log_7 7^3 + \log_9 1^6 + 2^{\log_2 5} = 8$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

5. Para quais valores de x existe $\log_3 (x - 5)$?

Resolução

Para que o logaritmo exista, as duas condições de existência da definição precisam ser obedecidas.

Analisando $\log_3 (x - 5)$, temos:

- logaritmando: $x - 5$
- base: 3

Como 3 é um número positivo e diferente de 1, para que o logaritmo exista em $\mathbb{R}$, devemos ter:

$x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

Logo, para que as duas condições de existência sejam obedecidas, precisamos ter $x > 5$.

Portanto, $\log_3 (x - 5)$ existe para x real, tal que $x > 5$.

6. Para quais valores reais de x existe $\log_{x+1} (x^2 + 3x - 18)$?

Resolução

Para que o logaritmo exista, devemos satisfazer, simultaneamente, as seguintes condições:

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 18 > 0 & \text{(I)} \\ x + 1 > 0 \text{ e } x + 1 \neq 1 & \text{(II)} \end{cases}$$

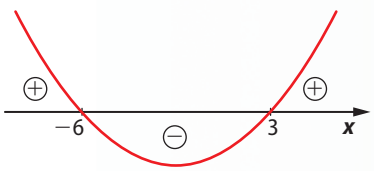
Resolvendo (I) e (II), temos:

(I) $x^2 + 3x - 18 > 0$

Zeros da função f dada por $f(x) = x^2 + 3x - 18$:

$x^2 + 3x - 18 = 0 \Rightarrow x' = 3$ e $x'' = -6$

Estudo do sinal de f:



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Logo, a solução de (I) é:

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x < -6$ ou $x > 3$

(II) $x + 1 > 0$ e $x + 1 \neq 1$

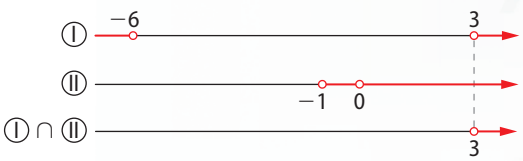
$$\begin{cases} x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \\ x + 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases}$$

Analisando os valores obtidos:

Logo, a solução de (II) é:

$x \in \mathbb{R}$ tal que $x > -1$ e $x \neq 0$

Fazendo a intersecção das soluções de (I) e (II):



Portanto, $\log_{x+1} (x^2 + 3x - 18)$ existe para $x \in \mathbb{R}$ tal que $x > 3$.

LISAL1983/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Escreva no caderno o valor dos logaritmos:

a) $\log_9 1$ 0

b) $\log_8 8$ 1

c) $\log_{\frac{1}{10}}\left(\frac{1}{10}\right)^3$ 3

d) $5^{\log_5 7}$ 7

e) $\log_{\sqrt{10}}\sqrt{10}$ 1

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3^5$ −5

2. Aplicando a definição, calcule o valor dos logaritmos:

a) $\log_{\sqrt{8}} 4$ $\frac{4}{3}$

b) $\log_5 0{,}000064$ −6

c) $\log_{49}\sqrt[3]{7}$ $\frac{1}{6}$

d) $\log_2 \frac{1}{16}$ −4

e) $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{32}$ $-\frac{5}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{4}} 1024$ −5

3. Determine o valor das expressões a seguir.

a) $\log_5 \frac{1}{25} + \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4}$ −4

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0{,}1} 10\sqrt{10}$ $-\frac{9}{2}$

4. Calcule o valor de cada uma das expressões a seguir:

a) $\log_4 4 - \log_5 5^{-7}$ 8

b) $3^{\log_3 27} : 4^{\log_4 \frac{1}{2}}$ 54

c) $(\log_{0{,}2} 1)^{\log_6 6^5}$ 0

d) $\dfrac{\log_3 1 + \log_{10} 0{,}01}{\log_2 \frac{1}{64} \cdot \log_4 \sqrt{8}}$ $\frac{4}{9}$

5. Calcule as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$ em que:

$a = \log_{10} 0{,}001$; $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$ e $c = 3 \cdot \log_2 8$. $S = \{-1, 3\}$

6. Determine o valor de m, sabendo que:

$m = 2^{5+\log_2 3} + 3^{\log_3 7 + \log_3 2}$ $m = 110$

7. Um número é tal que seu logaritmo é 4 na base p e 8 na base $\frac{p}{3}$. Calcule esse número. 6 561

8. Determine os valores reais de x para que exista:

a) $\log (1 - x)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

b) $\log_5 (5x - 2) + \log_5 (x - 3)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $\log_5 (x^2 + 4x - 5)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

d) $\log (50 - 5x - x^2)$ $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5\}$

Propriedades operatórias dos logaritmos

Vamos estudar agora as propriedades operatórias dos logaritmos que poderão ser utilizadas em diferentes situações envolvendo cálculos com logaritmos. Essas são as principais propriedades e merecem destaque por serem úteis para transformar um produto em uma soma, um quociente em uma subtração e uma potência em uma multiplicação, além de realizar mudanças de bases dos logaritmos. Assim, dados os números reais a, b, c e n, com $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$, temos as propriedades apresentadas a seguir.

Logaritmo de um produto

Em uma mesma base, o logaritmo de um **produto** de dois números positivos é igual à **soma** dos logaritmos de cada um dos fatores.

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração

Considere os logaritmos:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a (b \cdot c) = z \Leftrightarrow a^z = b \cdot c$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III), temos:

$a^z = b \cdot c \Rightarrow a^z = a^x \cdot a^y \Rightarrow a^z = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$

Dessa última igualdade, obtemos: $\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$.

Exemplos:

a) $\log_2 (2 \cdot 3) = \log_2 2 + \log_2 3$

b) $\log_3 500 = \log_3 (5 \cdot 100) = \log_3 5 + \log_3 100$

Logaritmo de um quociente

Em uma mesma base, o logaritmo de um **quociente** de dois números positivos é igual à **diferença** entre o logaritmo do dividendo e o logaritmo do divisor.

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$$

Demonstração

Considere os logaritmos:

$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$ (I)

$\log_a c = y \Leftrightarrow a^y = c$ (II)

$\log_a \frac{b}{c} = z \Leftrightarrow a^z = \frac{b}{c}$ (III)

Substituindo (I) e (II) em (III):

$a^z = \frac{b}{c} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} \Rightarrow a^z = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$

Dessa última igualdade, obtemos: $\log_a \left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$.

Exemplos:

a) $\log_6 \left(\frac{243}{5}\right) = \log_6 243 - \log_6 5$

b) $\log_4 \left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right) = \log_4 \sqrt{10} - \log_4 3$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Logaritmo de uma potência

Em uma mesma base, o logaritmo de uma **potência** de base positiva é igual ao **produto** do expoente pelo logaritmo da base dessa potência.

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$$

Demonstração

Considere o logaritmo $\log_a b = x$. Pela definição, temos $a^x = b$.
Elevando os dois membros ao expoente n, temos: $a^x = b \Rightarrow (a^x)^n = b^n \Rightarrow a^{nx} = b^n$.
Portanto, nx é o logaritmo de b^n na base a, isto é: $\log_a b^n = nx$.
Substituindo x por $\log_a b$, obtemos: $\log_a b^n = n \cdot \log_a b$.

Exemplos:

a) $\log_3 5^2 = 2 \cdot \log_3 5$

b) $\log_5 (12)^{-2} = -2 \cdot \log_5 12$

Mudança de base do logaritmo

Até aqui vimos as propriedades operatórias dos logaritmos que valem para os logaritmos de mesma base.

Vamos estudar agora uma propriedade que permite a **mudança de base** do logaritmo, muito útil nas situações em que é preciso realizar operações com logaritmos de bases diferentes.

Admitindo uma base c, tal que $c > 0$ e $c \neq 1$, temos:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Demonstração

Considere o logaritmo $\log_a b = x$.
Pela definição, temos $a^x = b$.
Agora, considere: $\log_c b = y \Leftrightarrow c^y = b$ e $\log_c a = z \Leftrightarrow c^z = a$.
Assim, da igualdade $a^x = b$ e considerando $z \neq 0$, temos:

$$a^x = b \Rightarrow (c^z)^x = c^y \Rightarrow c^{zx} = c^y \Rightarrow zx = y \Rightarrow x = \frac{y}{z} \Rightarrow \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

Exemplos:

a) $\log_2 6 = \dfrac{\log_3 6}{\log_3 2}$

b) $\log_{16} 64 = \dfrac{\log_2 64}{\log_2 16}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

PETR VACLAVEK/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Calculadora e logaritmos

Podemos usar uma calculadora científica no cálculo de logaritmos. Nela, trabalharemos com o logaritmo decimal e com o logaritmo natural.

MIKSER45/SHUTTERSTOCK.COM

SEKSUN GUNTANID/SHUTTERSTOCK.COM

■ A ordem das teclas a serem pressionadas para executar os cálculos pode diferir de acordo com o modelo da calculadora científica utilizada.

Geralmente, as calculadoras científicas apresentam duas teclas para o cálculo de logaritmos: log e ln. Com elas, podemos calcular o logaritmo decimal e natural de um número positivo. Por exemplo:

- Para calcular log 16,4, pressionamos log 1 6 · 4 = e obtemos 1,214843848...
- Para calcular ln 6, pressionamos ln 6 = e obtemos 1,791759469...

Também podemos determinar o logaritmando em uma operação aplicando a definição de logaritmo e utilizando a opção da calculadora científica que permite calcular uma potência de 10. Por exemplo:

- para determinar o valor de k em $\log k \simeq 0{,}434$, aplicamos a definição de logaritmo de modo que $\log k \simeq 0{,}434 \Leftrightarrow k \simeq 10^{0{,}434}$.

  Pressionamos SHIFT 10^x log (0 · 4 3 4) = e obtemos 2,716439269...
- para determinar o valor de b em $\ln b \simeq 0{,}693$, aplicamos a definição de logaritmo de modo que $\ln b \simeq 0{,}693 \Leftrightarrow b \simeq e^{0{,}693}$. Em seguida, pressionamos SHIFT e^x ln (0 · 6 9 3) = e obtemos 1,999705661...

SAIBA QUE...

Caso tenhamos logaritmos em outras bases, é necessário fazer a mudança de base antes de efetuar os cálculos com a calculadora.

Professor, pode haver diferença entre o funcionamento e as funções da calculadora. Se julgar interessante, pedir aos estudantes que consultem o manual da calculadora que eles estão usando.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

7. Calcule os logaritmos a seguir considerando $\log 2 \simeq 0{,}301$, $\log 3 \simeq 0{,}477$ e $\log 5 \simeq 0{,}699$.

a) $\log 15$ **b)** $\log 18$ **c)** $\log \sqrt{3}$ **d)** $\log 7{,}2$

Resolução

a) $\log 15 = \log (3 \cdot 5)$

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log (3 \cdot 5) = \log 3 + \log 5 = 0{,}477 + 0{,}699 = 1{,}176$

Portanto, $\log 15 = 1{,}176$.

b) $\log 18 = \log (2 \cdot 3 \cdot 3) = \log (2 \cdot 3^2)$

Usando as propriedades do logaritmo de um produto e de uma potência, temos:

$\log (2 \cdot 3^2) = \log 2 + \log 3^2 = \log 2 + 2 \cdot \log 3 = 0{,}301 + 2 \cdot 0{,}477 = 1{,}255$

Portanto, $\log 18 = 1{,}255$.

c) $\log \sqrt{3} = \log 3^{\frac{1}{2}}$

A propriedade do logaritmo da potência vale para expoentes reais, logo:

$$\log 3^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 3 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}477 = 0{,}2385$$

Portanto, $\log \sqrt{3} = 0{,}2385$.

d) $\log 7{,}2 = \log \frac{72}{10}$

Usando a propriedade do logaritmo do quociente, temos:

$$\log \frac{72}{10} = \log 72 - \underbrace{\log 10}_{1} = \log 72 - 1$$

Fatorando o número 72 e aplicando as propriedades estudadas, obtemos:

$\log 72 = \log (2^3 \cdot 3^2) = \log 2^3 + \log 3^2 =$

$= 3 \cdot \log 2 + 2 \cdot \log 3 = \underbrace{3 \cdot 0{,}301}_{0{,}903} + \underbrace{2 \cdot 0{,}477}_{0{,}954} = 1{,}857$

Assim, $\log 7{,}2 = \log 72 - 1 = 1{,}857 - 1 = 0{,}857$.

Portanto, $\log 7{,}2 = 0{,}857$.

8. Sendo $\log a = 4$, $\log c = 6$ e $\log d = -1$, calcule o valor de $\log \left(\frac{ac}{d}\right)$.

Resolução

Utilizando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$$\log \left(\frac{ac}{d}\right) = \log (ac) - \log d$$

Usando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$\log (ac) - \log d = \log a + \log c - \log d$

Substituindo os valores dados, obtemos:

$\log a + \log c - \log d = 4 + 6 - (-1) = 11$

Portanto, $\log \left(\frac{ac}{d}\right) = 11$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

9. Usando as aproximações $\log 2 = 0{,}301$, $\log 3 = 0{,}477$ e $\log 7 = 0{,}845$, determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $\log_6 70$

b) $\log_5 20$

Resolução

Como os dados no enunciado são logaritmos na base 10, em cada item vamos primeiro efetuar a mudança de base para a base decimal. Em seguida, aplicamos as propriedades estudadas.

a) $\log_6 70 = \dfrac{\log 70}{\log 6} = \dfrac{\log (7 \cdot 10)}{\log (2 \cdot 3)} = \dfrac{\log 7 + \log 10}{\log 2 + \log 3} = \dfrac{0{,}845 + 1}{0{,}301 + 0{,}477} = \dfrac{1{,}845}{0{,}778} \simeq 2{,}371$

b) $\log_5 20 = \dfrac{\log 20}{\log 5} = \dfrac{\log (4 \cdot 5)}{\log 5} = \dfrac{\log 2^2 + \log \frac{10}{2}}{\log \frac{10}{2}} = \dfrac{(2 \cdot \log 2) + \log 10 - \log 2}{\log 10 - \log 2} =$

$= \dfrac{2 \cdot 0{,}301 + 1 - 0{,}301}{1 - 0{,}301} = \dfrac{1{,}301}{0{,}699} \simeq 1{,}861$

10. Com o auxílio de uma calculadora científica, escreva 783 como uma potência de base 10. Considere 5 casas decimais.

Resolução

Aplicando a definição de logaritmo temos $\log 783 = x \Leftrightarrow 783 = 10^x$.

Para calcular $\log 783$ na calculadora e obter o valor de x, pressionamos

log 7 8 3 = e obtemos 2,893761762...

Considerando apenas cinco casas decimais depois da vírgula, temos $\log 783 \approx 2{,}89376$

Logo, $783 \simeq 10^{2{,}89376}$.

11. Resolva a equação $10^x = 95$, obtendo o valor de x com aproximação de 5 casas decimais. Use uma calculadora científica.

Resolução

Aplicando a definição de logaritmo temos $10^x = 95 \Leftrightarrow x = \log 95$.

Para calcular $\log 95$ na calculadora e obter o valor de x, pressionamos log 9 5 =

e obtemos 1,977723605...

Considerando apenas cinco casas decimais depois da vírgula, temos: $\log 95 \simeq 1{,}97772$

Logo, $x \simeq 1{,}97772$.

12. Com o auxílio de uma calculadora científica, calcule um valor aproximado para x em $\ln x \simeq -2{,}36653$.

Resolução

Aplicando a definição de logaritmo $\ln x \simeq -2{,}36653 \Leftrightarrow x \simeq e^{-2{,}36653}$.

Para calcular $e^{-2{,}36653}$ na calculadora e determinar o valor de x, pressionamos

SHIFT (e^x / e) ln (− 2 · 3 6 6 5 3) = e obtemos 0,093805668...

Logo, $x \simeq 0{,}0938$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

9. Usando a aproximação $\log 11 = 1{,}041$, calcule:

a) $\log 110$ $\simeq 2{,}041$

b) $\log 121$ $\simeq 2{,}082$

c) $\log \frac{1}{11}$ $\simeq -1{,}041$

d) $\log \sqrt{1331}$ $\simeq 1{,}562$

e) $\log 1{,}21$ $\simeq 0{,}082$

f) $\log 0{,}121$ $\simeq -0{,}918$

10. Calcule o valor das expressões aplicando as propriedades dos logaritmos:

a) $\log 5 + \log 200$ 3

b) $\log 100 + \log 50 + \log 10 + \log 2$ 5

c) $\log_2 24 - \log_2 3$ 3

d) $\log_5 8 + \log_5 12{,}5 - \log_5 4$ 2

11. Sendo $\log_x a = 6$, $\log_x b = 4$ e $\log_x c = 2$, calcule:

a) $\log_c \sqrt{abc}$ 3

b) $\log_c (a^3 \cdot b^2)$ 13

12. Se $\log_2 3 = k$, qual é o valor do produto $\log_2 3 \cdot \log_3 2$? 1

13. Calcule o produto $\log_3 2 \cdot \log_2 5 \cdot \log_5 3$. 1

14. Simplifique a expressão $\log_3 5 \cdot \log_4 27 \cdot \log_{25} \sqrt[3]{2}$. $\frac{1}{4}$

15. Resolva o sistema a seguir: $S = \{(10, 10)\}$

$$\begin{cases} a + b = 20 \\ \log a + \log b = 2 \end{cases}$$

16. (PUC-SP) Se $\log 2 = x$ e $\log 3 = y$, determine $\log 375$. $y + 3 - 3x$

17. Um certo componente eletrônico processa n bits em $\log n$ milissegundos. Sabendo que o valor aproximado de $\log 5$ é 0,699, em quantos milissegundos serão processados 64 bits? 1,806 milissegundo

As atividades a seguir devem ser resolvidas com o auxílio de uma calculadora científica.

18. Calcule os valores a seguir com aproximação, quando necessário, de cinco casas decimais:

a) $\log 0{,}7$ $-0{,}15490$

b) $\log 0{,}12$ $-0{,}92082$

c) $\log 834$ 2,92117

d) $\log 0{,}00001$ -5

e) $\ln 25$ 3,21888

f) $\ln 0{,}92$ -0.08338

19. Em cada caso, determine b com aproximação de duas casas decimais, quando necessário:

a) $\log b = 1{,}88081$ 76

b) $\log b = 1{,}75587$ 57

c) $\ln b = 6{,}20051$ 493

d) $\ln b = 1{,}05082$ 2,86

20. Determine o valor de x em cada caso, com aproximação de quatro casas decimais.

a) $\log x = -0{,}5$ 0,3162

b) $\log x = -0{,}15$ 0,7079

c) $10^x = 0{,}5$ $-0{,}3010$

d) $10^x = 2$ 0,3010

e) $e^x = 10$ 2,3026

f) $e^x = 0{,}5$ $-0{,}6931$

g) $e^x = 0{,}15$ $-1{,}8971$

h) $e^x = 0{,}005$ $-5{,}2983$

21. Copie no caderno o quadro a seguir e complete-o com os valores faltantes. Caso seja necessário, use aproximação com seis casas decimais.

Número (N)	Potência de 10	$\log N$
75	$10^{1{,}875061}$	1,875061
643	$10^{2{,}808210}$	2,808210
1320	$10^{3{,}120573}$	3,120573
1 000 000	10^6	6
0,00001	10^{-5}	-5
0,7	$10^{-0{,}154901}$	$-0{,}154901$
0,834	$10^{-0{,}078833}$	$-0{,}078833$

22. Determine b em cada caso:

a) $\ln b \simeq 1{,}098612289$ $b = 3$

b) $\ln b \simeq 1{,}945910149$ $b = 7$

c) $\ln b \simeq -0{,}69314718$ $b = 0{,}5$

d) $\ln b = -1$ $b \simeq 0{,}367879$

e) $\ln b = 0$ $b = 1$

23. O valor aproximado de um logaritmo natural é 3,48124. Descubra qual é esse número, considerando aproximação de uma casa decimal. 32,5

24. Calcule $10^{1{,}4} - 5 \cdot 10^{0{,}7}$, usando aproximações de uma casa decimal. 0

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O texto a seguir apresenta um resumo do progresso científico ocorrido entre os séculos 16 e 17. Nesse contexto, a participação do matemático escocês John Napier no intuito de simplificar cálculos matemáticos foi fundamental para o surgimento do conceito de logaritmo.

A ideia de Napier era verificar, ao escrever um número positivo como uma potência, que seria possível transformar as multiplicações em adições e as divisões em subtrações, exatamente como vimos nas propriedades operatórias do logaritmo.

UNIVERSAL HISTORY ARCHIVE/UIG/BRIDGEMAN IMAGES/FOTOARENA
LE CHERNINA/SHUTTERSTOCK.COM

Matemático escocês John Napier (1550-1617).

A ideia de John Napier e o logaritmo

[...]

O século XVI e o início do século XVII testemunharam uma enorme expansão do conhecimento científico em todos os campos. A Geografia, a Física e a Astronomia, livres de antigos dogmas, mudaram rapidamente a percepção que o homem tinha do universo. O sistema heliocêntrico de Copérnico, depois de lutar durante quase um século contra as resoluções da Igreja, encontrara finalmente a aceitação. A circum-navegação do globo por Magalhães, em 1521, anunciou uma nova era de exploração marítima que não deixaria um canto do mundo sem ser visitado. Em 1569 Gerhard Mercator publicou o seu aclamado novo mapa do mundo, acontecimento que teve um impacto decisivo na arte da navegação. Na Itália, Galileu Galilei estabelecia as fundações da ciência da mecânica, enquanto na Alemanha Johannes Kepler formulava suas três leis do movimento planetário, livrando a astronomia, de uma vez por todas, do universo geocêntrico dos gregos.

Esses desenvolvimentos envolviam uma quantidade crescente de dados numéricos, forçando os eruditos a passarem boa parte de seu tempo fazendo cálculos tediosos. A época pedia uma invenção que livrasse os cientistas, de uma vez por todas, desse fardo. Napier aceitou o desafio.

[...]

Sua linha de pensamento era a seguinte: se pudermos escrever **qualquer** número positivo como uma potência de algum dado número fixo (o qual depois seria chamado de base), então **a multiplicação e a divisão de números seria o equivalente à adição ou à subtração de seus expoentes**. Além disso, elevar um número à enésima potência (isto é, multiplicá-lo por si mesmo n vezes) seria equivalente a **somar** o expoente n vezes a ele próprio, isto é, multiplicá-lo por n [...]. Resumindo, cada operação aritmética seria reduzida à que está abaixo dela na hierarquia das operações, o que reduziria muito a dificuldade das computações numéricas.

Vamos ilustrar como esta ideia funciona escolhendo como nossa base o número 2. A tabela 1.1 mostra as potências sucessivas de 2, começando com $n = -3$ e terminando com $n = 12$. Suponha que queremos multiplicar 128 por 32. Nós procuramos na tabela os expoentes correspondentes a 32 e a 128 e descobrimos que eles são, respectivamente, 5 e 7. Somando esses expoentes, obtemos 12.

Agora revertemos o processo, procurando o número cujo expoente correspondente é 12; este número é 4 096, a resposta desejada. [...]

Tabela 1.1 – Potências de 2

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	9	16	32	64	128	256	512	1 024	2 048	4 096

MAOR, E. ***e:*** a história de um número. Tradução de Jorge Calife. Rio de Janeiro: Record, 2003. p. 17-20.

SHMER/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Função logarítmica

Existem diversas situações em que são usados logaritmos; uma delas, por exemplo, é a escala de pH (potencial hidrogeniônico). O pH indica a acidez de um meio aquoso e é calculado em função da concentração de íons de hidrogênio H^+ que esse meio apresenta. Na escala de pH, uma solução é considerada ácida quando $0 \leqslant pH < 7$, neutra quando $pH = 7$ e básica quando $7 < pH \leqslant 14$.

O cálculo do pH de um meio aquoso é feito usando-se logaritmo:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]}$$

← concentração de íons de hidrogênio

A igualdade anteriormente descrita é a representação de uma **função logarítmica**.

Por exemplo, podemos determinar o pH de um cafezinho que apresenta 10^{-5} mol/L de íons de hidrogênio. Sabendo disso:

$$pH = \log \frac{1}{[H^+]} = \log \frac{1}{10^{-5}} = \log 1 - \log 10^{-5} = 0 - (-5) \cdot \log 10 = 5 \cdot 1 \Rightarrow pH = 5$$

Portanto, o cafezinho tem pH igual a 5, o que indica que ele é considerado um meio ácido.

TIM ORAM/AGEFOTOSTOCK/EASYPIX BRASIL

O papel indicador em tira absorvente é um indicador universal de pH que, ao ser mergulhado em solução aquosa, adquire coloração específica apontando se o meio é ácido ou básico, dentro de uma escala de 1 a 14. Para descobrir o valor de pH da solução analisada, basta comparar a cor obtida na tira de papel com uma escala padrão de cores.

Agora, acompanhe a definição matemática de função logarítmica.

A função $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada **função logarítmica**.

Exemplos:

a) $f(x) = \log x$

b) $g(x) = \log_5 x$

c) $h(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

Gráfico da função logarítmica

PENSE E RESPONDA

Vamos, agora, examinar o comportamento da função logarítmica traçando seu gráfico no plano cartesiano.

Primeiro, calcule o valor de $f(x) = \log_2 x$ e de $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ para os seguintes valores de x: $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4 e 8.

Na sequência, esboce o gráfico de $f(x)$ e $g(x)$, usando os valores obtidos. Você pode fazer os gráficos das funções onde achar mais conveniente, no papel quadriculado ou em um *software* de geometria dinâmica.

Agora responda no caderno: Ver as **Orientações para o professor.**

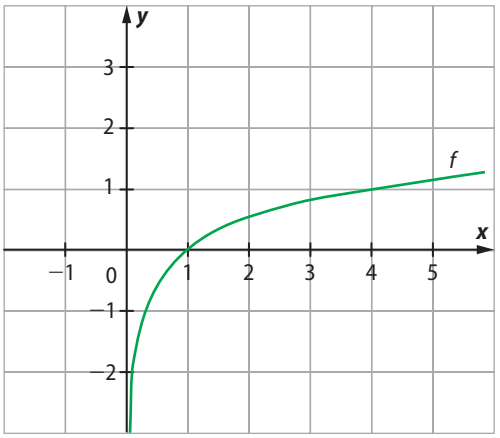
- À medida que o valor de x aumenta, o que acontece com o valor de $f(x)$? E com o valor de $g(x)$?
- Observando os valores calculados e os gráficos traçados, você diria que a função f é uma função crescente ou decrescente? E a função g?
- Faça o mesmo trabalho para funções do tipo $\log_a x$ para valores de $a > 1$ e para $0 < a < 1$ e, na sequência, responda: nos casos em que $a > 1$, as funções parecem ser crescentes ou decrescentes? E nos casos em que $0 < a < 1$?

Na atividade anterior, você deve ter observado que sempre que a era maior do que 1, quanto maior o valor de x, maior era o logaritmo de x na base a. Isso porque se $a > 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é **crescente** em todo seu domínio (quando o valor de x cresce, o valor de $\log_a x$ também cresce).

Da mesma maneira, você deve ter reparado que quando a estava entre 0 e 1, quanto maior o valor de x, menor era o logaritmo de x na base a. Isso porque, se $0 < a < 1$, a função $f(x) = \log_a x$ é **decrescente** em todo seu domínio (quando o valor de x cresce, o valor de $\log_a x$ decresce).

Veja agora os gráficos da função logarítmica em cada um desses casos.

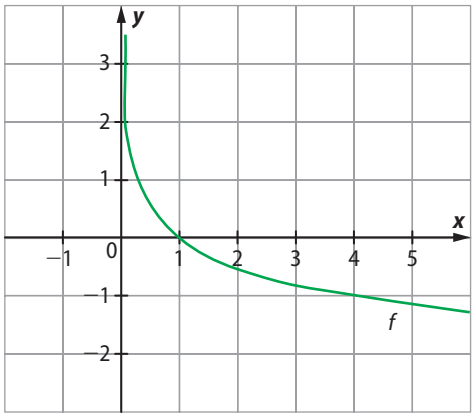
> **1º caso:** $f(x) = \log_a x$, quando $a > 1$.



EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> **2º caso:** $f(x) = \log_a x$, quando $0 < a < 1$.



EDITORIA DE ARTE

SAIBA QUE...

Note que as curvas dos gráficos se aproximam do eixo *y*, mas não o tocam. Em contrapartida, ambos cruzam o eixo *x* no ponto (1, 0).

De modo geral, dada a função *f* definida por $f(x) = \log_a x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$) e observando os gráficos, temos:

- O **domínio** da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é $D(f) = \mathbb{R}_+^*$.
- O **contradomínio** da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é $CD(f) = \mathbb{R}$.
- O conjunto **imagem** da função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é $Im(f) = \mathbb{R}$.

A função logarítmica dada por $f(x) = \log_a x$ é bijetora, pois é sobrejetora e injetora.

Relação entre função exponencial e função logarítmica

Vimos no início deste Capítulo que a potenciação e os logaritmos estão relacionados. Do mesmo modo, veremos a seguir que a função logarítmica e a função exponencial também estão relacionadas.

Partimos do fato de que a função exponencial $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x) = a^x$ (com $a > 0$ e $a \neq 1$), assim como a função logarítmica, é bijetora. Nesse caso, podemos determinar sua função inversa. Observe.

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$$

Para poder comparar as funções exponencial e logarítmica vamos traçar os respectivos gráficos em um mesmo plano cartesiano. Para isso, trocamos *x* por *y* e *y* por *x* na segunda igualdade e obtemos $y = \log_a x$. Desse modo, a variável independente *x* será representada no eixo horizontal e a variável dependente *y* no eixo vertical, como estamos acostumados.

Comparando as duas funções, temos:

$$\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^* \\ f(x) = a^x \end{cases} \text{ e } \begin{cases} f^{-1} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \log_a x \end{cases}$$

Portanto, a função inversa da função exponencial é a função logarítmica. De modo análogo, também podemos verificar que a inversa da função logarítmica é a função exponencial.

É interessante ainda observar que a composição das funções $f \circ f^{-1}$ e $f^{-1} \circ f$ resulta na função identidade $y = x$.

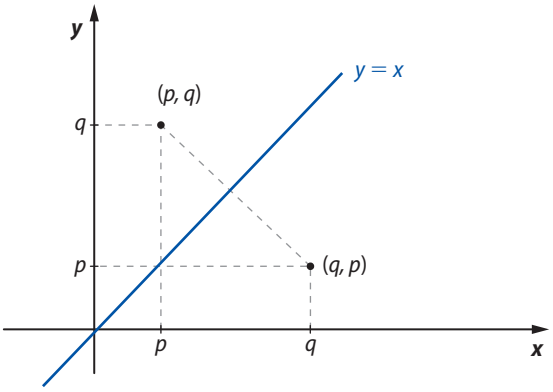
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Agora que já sabemos que as funções exponencial e logarítmica são inversas uma da outra, vamos ver como se comportam os gráficos dessas funções. Será que é possível estabelecer relações entre eles?

Se um ponto (p, q) pertence ao gráfico de $y = \log_a x$, por exemplo, com $a > 1$, então $q = \log_a p$. Aplicando a definição de logaritmo, podemos escrever essa equação na forma exponencial como $p = a^q$. Com isso, percebemos que o ponto (q, p) pertence ao gráfico da função $y = a^x$.

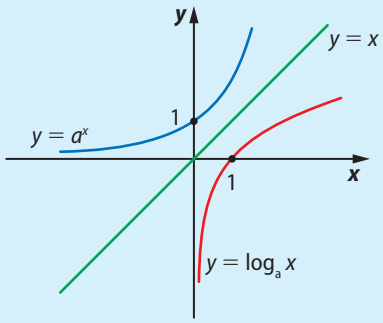
Mas qual é a relação entre os pontos (p, q) e (q, p)?



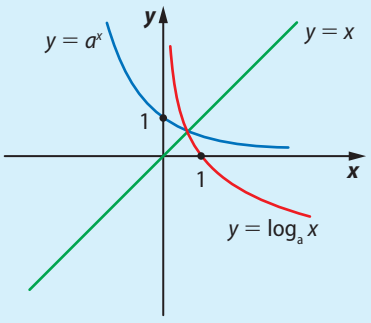
É possível demonstrar que o ponto (q, p) é simétrico ao ponto (p, q) em relação à reta $y = x$. No entanto, essa simetria não ocorre somente com esses pontos, mas também com todos os pontos dos dois gráficos, de tal forma que o gráfico de $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é simétrico ao gráfico de $y = a^x$ em relação à reta $y = x$, também chamada de bissetriz dos quadrantes ímpares.

Veja como ficam os gráficos das funções exponencial e logarítmica em um mesmo plano cartesiano para cada caso dos valores da base.

> Base: $a > 1$



> Base: $0 < a < 1$



T.SUMAETHO/SHUTTERSTOCK.COM

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Equações logarítmicas

As equações que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real, positiva e diferente de 1, são denominadas **equações logarítmicas**.

Exemplos:

a) $\log_3 (x - 1) = 2$

b) $\log_{x+1} (19 - x) = 2$

c) $1 - \log_2 x = \log_2 3 + 4 \cdot \log_2 x$

d) $\log_2 (x^2 + x + 2) = 5$

Para resolver essas equações, aplicamos a definição de logaritmo e a 5ª propriedade dessa definição:

$$\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$$

Além disso, devemos considerar a condição de existência de todos os logaritmos envolvidos, ou seja, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$ e $c > 0$.

Inequações logarítmicas

As desigualdades que apresentam a incógnita no logaritmando ou na base de um logaritmo de base real positiva e diferente de 1 são denominadas **inequações logarítmicas**.

Exemplos:

a) $\log_2 x > 4$

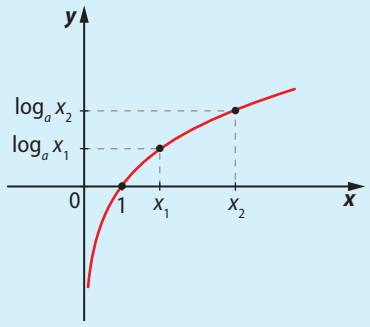
b) $\log (x - 1) + \log (3x + 2) \leqslant \log x$

c) $\log_5 x + \dfrac{1}{\log_5 x} < \dfrac{1}{4}$

d) $\log_{x+1} (x^2 + 4x - 5) \geqslant 3$

Com base no gráfico da função f dada por $f(x) = \log_a x$, veremos duas condições necessárias à resolução de uma inequação logarítmica. Observe que f é crescente para $a > 1$ e decrescente para $0 < a < 1$.

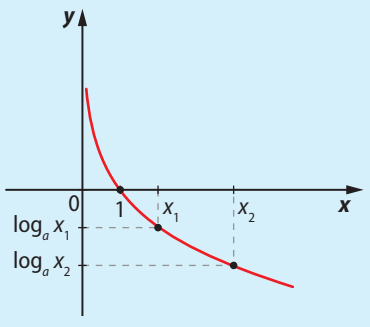
> **1º caso: $a > 1$ (função crescente)**



$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 < \log_a x_2$$

Conservamos o sentido da desigualdade.

> **2º caso: $0 < a < 1$ (função decrescente)**



$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \log_a x_1 > \log_a x_2$$

Invertemos o sentido da desigualdade.

ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

13. Esboce o gráfico da função $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$.

Resolução

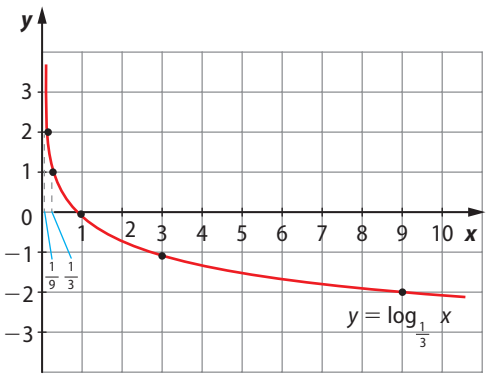
Sendo a base do logaritmo igual a $\frac{1}{3}$, é conveniente escolher potências de base $\frac{1}{3}$. para x. Assim:

- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = -2$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} = -1$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{0} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{0} = 0$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{1} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{1}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{1} = 1$
- $x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2} \Rightarrow f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^{2}\right) = \log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{3}\right)^{2} = 2$

Dessa forma, podemos construir a seguinte tabela:

x	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$
y	−2	−1	0	1	2

Marcando os pontos no plano cartesiano, obtemos o gráfico:



14. Dada a função $f(x) = \log_2 (4x - 1)$, faça o que se pede.

a) Classifique a função em crescente ou decrescente.

b) Determine o domínio de f.

c) Determine $f^{-1}(x)$.

Resolução

a) Como a base do logaritmo de $f(x)$ é maior do que 1, pois $a = 2$, a função é crescente.

b) Pela condição de existência dos logaritmos, temos: $\log_a b = x \Leftrightarrow b = a^x$, $b > 0$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Precisamos analisar a base e o logaritmando da função logarítmica:

- Logaritmando ($b > 0$): $4x - 1 > 0$

  $4x - 1 > 0 \Rightarrow 4x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{4}$
- Base ($a > 0$ e $a \neq 1$): $a = 2$

Logo, o domínio de $f(x) = \log_2 (4x - 1)$ é

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{1}{4}\right\}$.

c) Para determinar a função inversa, substituímos a variável x por y:

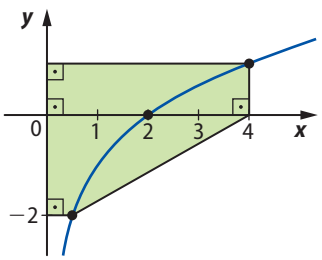
$y = \log_2 (4x - 1)$

$x = \log_2 (4y - 1) \Rightarrow 2^x = 2^{\log_2 (4y - 1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^x = 4y - 1 \Rightarrow 4y = 2^x + 1 \Rightarrow y = \frac{2^x + 1}{4}$

Portanto, a função inversa é $f^{-1}(x) = \frac{2^x + 1}{4}$.

15. A curva a seguir representa o gráfico da função $f(x) = \log_2\left(\frac{x}{2}\right)$.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Calcule a medida da área da região sombreada da figura.

Resolução

Se $x = 4$, temos:

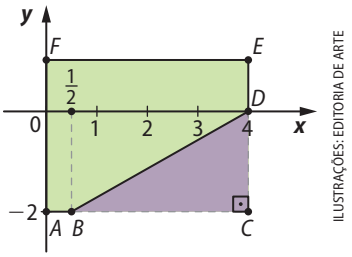
$f(4) = \log_2\left(\frac{4}{2}\right) \Rightarrow f(4) = \log_2 2 = 1$

Se $f(x) = -2$, vem:

$-2 = \log_2\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \frac{x}{2} = 2^{-2} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Assim, obtemos a figura a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

As medidas das áreas são:

- retângulo $ACEF$: $A_1 = 3 \cdot 4 = 12$
- triângulo BCD: $A_2 = \dfrac{3{,}5 \cdot 2}{2} = 3{,}5$

Portanto, a medida da área de $ABDEF$ é: $12 - 3{,}5 = 8{,}5$.
Área da região sombreada: 8,5 unidades de área.

16. Resolva a equação: $\log_3 (2x - 7) = 4$.

Resolução

Inicialmente, verificamos a condição de existência do logaritmo:

$2x - 7 > 0 \Rightarrow 2x > 7 \Rightarrow x > \dfrac{7}{2}$

Para resolver a equação, vamos expressar o 2º membro como um logaritmo de base 3 (a mesma base do logaritmo no 1º membro da equação) do seguinte modo: $\log_3 y = 4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 3^4 = y \Rightarrow y = 81$.
Substituindo o valor de y na equação dada, temos: $\log_3 (2x - 7) = \log_3 81$.
Como $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, obtemos:
$2x - 7 = 81 \Rightarrow 2x = 88 \Rightarrow x = 44$.
Como $x = 44$ satisfaz à condição de existência, o conjunto solução da equação é $S = \{44\}$.

17. Estudos de demografia indicam que: a população de um certo país no ano zero é P_0 e decorridos t anos a população será aproximadamente $P(t) = P_0 \cdot e^{0{,}03t}$. Quantos anos devem decorrer para que a população desse país duplique? Considere $\ln 2 \simeq 0{,}69$.

Resolução

Para que a população duplique, devemos ter $P(t)$ igual ao dobro da população inicial P_0.

Logo, $P(t) = 2P_0 \Rightarrow 2P_0 = P_0 \cdot e^{0{,}03t} \Rightarrow 2 = e^{0{,}03t}$.

Tomando o logaritmo natural do primeiro e do segundo membro dessa equação, temos: $\ln 2 = \ln e^{0{,}03t}$.
Aplicando a propriedade de **logaritmo de uma potência** no segundo membro, vem que: $\ln 2 = 0{,}03t \cdot \ln e \Rightarrow 0{,}69 = 0{,}03t \cdot 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow t = \dfrac{0{,}69}{0{,}03} = \dfrac{69}{3} \Rightarrow t = 23$.
Portanto, devem decorrer 23 anos para que a população duplique.

18. Determine o valor real de x na equação: $\log_{\sqrt{2}} x + \dfrac{1}{3} \cdot \log_2 x = 0$.

Resolução

A condição de existência é $x > 0$.
Mudando os termos para a base 2, vem:

$\dfrac{\log_2 x}{\log_2 \sqrt{2}} + \dfrac{1}{3} \cdot \log_2 x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{\log_2 x}{\frac{1}{2}} + \dfrac{1}{3} \cdot \log_2 x = 0 \Rightarrow 6 \cdot \log_2 x + \log_2 x =$
$= 0 \Rightarrow 7 \cdot \log_2 x = 0 \Rightarrow \log_2 x = 0 \Rightarrow x = 1$

19. Resolva a inequação $\log_{\frac{1}{2}} (x - 3) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 4$.

Resolução

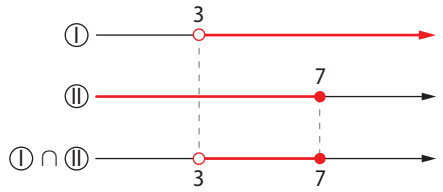
A condição de existência é:

$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$ (I)

Como a base é um número entre 0 e 1, a função logarítmica dada por $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ é decrescente e o sentido da desigualdade se inverte ao compararmos os logaritmandos.

$x - 3 \leqslant 4$
$x \leqslant 3 + 4$
$x \leqslant 7$ (II)

A solução da inequação deve satisfazer à condição de existência. Por isso, fazemos (I) ∩ (II):



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 3 < x \leqslant 7\}$.

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

25. Construa, em um mesmo plano cartesiano, os gráficos de: Ver as **Orientações para o professor**.

a) $f(x) = 2^x$ e $g(x) = \log_2 x$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ e $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

26. Esboce o gráfico da função dada por $f(x) = \log|x|$ e determine seu domínio e sua imagem.

27. (Ufop-MG) Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 9} + \log_{6-x}(x + 5)$. Encontre os valores de x para os quais f faz sentido. Ver as **Orientações para o professor**.

$\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leq -3 \text{ ou } 3 \leq x < 6 \text{ e } x \neq 5\}$

28. Copie o quadro no caderno e complete-o em seguida, referente às funções $f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ e $g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$. Ver as **Orientações para o professor**.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	2	1	0	−1	−2
$g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$	4	3	2	1	0

Agora, faça o que se pede nos itens a seguir.

a) Construa em um mesmo plano cartesiano os gráficos de f e de g.

b) Ao analisar os gráficos construídos, podemos dizer que f e g são funções crescentes ou decrescentes?

c) Qual o domínio e a imagem dessas funções?

d) O que você observa ao comparar os dois gráficos?

e) Sem construir, descreva como seria o gráfico da função dada por $p(x) = -2\log_{\frac{1}{4}} x$, em relação ao gráfico de f.

f) A partir do gráfico de f, descreva como obter o gráfico da função dada por $q(x) = \log_{\frac{1}{4}}(x + 2)$. Imagine que você esteja escrevendo um bilhete a um colega com essa instrução.

29. (Fuvest-SP) Considere as funções f e g definidas por Ver as **Orientações para o professor**.

$f(x) = 2\log_2(x - 1)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$,

$g(x) = \log_2\left(1 - \frac{x}{4}\right)$, se $x \in \mathbb{R}$, $x < 4$.

a) Calcule $f\left(\frac{3}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$, $g(-4)$, $g(0)$ e $g(2)$.

31. $k = -\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{4}{5}\right)$ e as árvores terão 29,52 metros de altura.

b) Encontre x, $1 < x < 4$, tal que $f(x) = g(x)$.

c) Levando em conta os resultados dos itens a) e b), esboce os gráficos de f e de g.

30. (Unicamp-SP) Considere a função $f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}$, definida para todo número real x. Ver as **Orientações para o professor**.

a) Mostre que $f(\log_{10}(2 + \sqrt{3}))$ é um número inteiro.

b) Sabendo que $\log_{10} 2 \simeq 0{,}3$, encontre os valores de x para os quais $f(x) = 52$.

31. (UFG-GO) O eucalipto é muito usado para a produção de papéis e celulose por causa da qualidade da matéria-prima e seu curto ciclo de vida. Um produtor de eucalipto possui uma plantação de determinada espécie adequada ao clima e ao tipo de solo de sua região. Essa espécie tem seu crescimento modelado pela função $h(t) = 50 \cdot (1 - 10^{-kt})$, onde h é a altura (em metro) em função do tempo t (em ano) e k é uma constante. Sabe-se que esse eucalipto alcança a altura de 10 m em 2 anos e que o produtor realizará o corte quando as árvores tiverem 8 anos.

Com base nessas informações, calcule o valor da constante k e a altura que os eucaliptos terão, em metro, quando o produtor for realizar o corte.

32. Calcule, com aproximação de 2 casas decimais, o valor de x na equação $7^x = 4{,}2$. Considere $\log 6 \simeq 0{,}7781$ e $\log 7 \simeq 0{,}8451$.

$S = \{0{,}74\}$

33. Determine o conjunto solução das equações:

a) $(\log_2 x)^2 - 9\log_8 x = 4$. $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$

b) $(\log_2 x)^2 + 4 \cdot \log_2 x - 32 = 0$ $S = \left\{\frac{1}{256}, 16\right\}$

34. Calcule o valor de x que satisfaz a equação $36^x = 24$. Use os seguintes valores: $\log 2 \simeq 0{,}30$ e $\log 3 \simeq 0{,}48$. $\frac{23}{26}$

35. A velocidade máxima, em *bits* por segundo com a qual os sinais podem passar por canais de comunicação pode ser obtida por meio da fórmula $v_{máx} = 3400 \cdot \log_2(x + 1)$, em que 3400 hertz é a frequência limite da voz humana e x está relacionado à potência do sinal. Calcule o valor de x correspondente a uma velocidade máxima de 27200 bits por segundo. 255

36. O número de bactérias N em uma cultura, depois de um tempo t, em minutos, é dada pela função $N(t) = N_0 \cdot e^{0{,}05t}$, em que N_0 é o

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

número inicial de bactérias da cultura. Em quanto tempo a população de bactérias passará a ser o triplo da inicial? Use ln 3 ≃ 1,099. 21,98 min

37. Quando compramos um bem de consumo durável, depois de certo tempo pode ocorrer uma depreciação do valor inicial desse produto. A fórmula utilizada para calcular a desvalorização de determinados produtos é $V = V_0 \cdot (1 - i)^t$, em que:

V: valor atualizado em função do tempo t.

V_0: valor do produto no momento da compra

i: taxa de juros de depreciação

t: tempo após a compra Ver as **Orientações para o professor**.

a) Elabore uma situação-problema que envolva a depreciação de um produto e que seja necessário calcular o tempo após a compra desse bem.

b) Troque a atividade criada por você com um colega e responda à situação elaborada por ele. Em seguida, verifiquem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

38. Para medir o potencial destrutivo de um terremoto, utiliza-se a escala Richter. A energia calculada em um terremoto é dada pela fórmula a seguir: Ver as **Orientações para o professor**.

$$I = \frac{2}{3} \cdot \log\left(\frac{E}{E_0}\right)$$

Sabendo que I varia de 0 a 9, que E = energia liberada em kW/h e o $E_0 = 7 \cdot 10^{-3}$ kW/h, faça o que se pede:

a) Elabore uma situação-problema que envolva a fórmula apresentada. Para tanto, pesquise acontecimentos reais e baseie-se nessa pesquisa.

b) Troque a atividade criada por você com um colega e responda à situação elaborada por ele. Em seguida, verifiquem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um.

39. Ao analisar uma amostra aquosa, um químico verificou que a concentração de íons de hidrogênio na solução era de $6{,}4 \cdot 10^{-7}$ mol/L.

a) Sabendo que o pH de uma solução é dado pela expressão $pH = -\log [H^+]$ e considerando log 2 ≃ 0,30, qual o valor do pH dessa solução? pH ≃ 6,2

b) Sabendo que uma solução é considerada ácida quando $0 \leqslant pH < 7$, neutra quando $pH = 7$ e básica quando $7 < pH \leqslant 14$, a solução analisada pelo químico é neutra, básica ou ácida? ácida

40. (Vunesp-SP) Leia a matéria publicada em junho de 2016.

> **Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias**
>
> Energia eólica deverá alcançar 10 GW nos próximos dias. O dia mundial do vento, 15 de junho, terá um marco simbólico este ano. Antes do final do mês, a fonte de energia que começou a se tornar realidade no país há seis anos alcançará 10 GW, sendo que o potencial brasileiro é de 500 GW. A perspectiva é a de que, em metade deste tempo, o Brasil duplique os 10 GW.
>
> (www.portalabeeolica.org.br. Adaptado.)

Considerando que a perspectiva de crescimento continue dobrando a cada três anos, calcule o ano em que o Brasil atingirá 64% da utilização do seu potencial eólico. Em seguida, calcule o ano aproximado em que o Brasil atingirá 100% da utilização do seu potencial eólico, empregando um modelo exponencial de base 2 e adotando log 2 = 0,3 no cálculo final. 2031 e 2033

41. Determine o conjunto solução das inequações:

a) $\log_{10} (a^2 - 2a + 1) < 2$
$S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$

b) $\log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 4x - 5) \geqslant -4$
$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x < -5 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

42. Uma pessoa recebeu a injeção de um certo medicamento. Esse medicamento na corrente sanguínea é eliminado lentamente pela ação dos rins. Admita que, partindo de uma quantidade inicial de Q_0 miligramas, após t horas, a quantidade de medicamento na corrente sanguínea fique reduzida a $Q(t) = Q_0 \cdot (0{,}64)^t$ miligramas. Determine o intervalo de tempo para que a quantidade de medicamento $Q(t)$ presente na corrente sanguínea da pessoa satisfaça a desigualdade $\frac{Q_0}{4} < Q(t) < \frac{Q_0}{2}$. Use uma calculadora científica. $1{,}55 < t < 3{,}1$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Resolução de inequações logarítmicas com o GeoGebra

Com o **GeoGebra**, é possível resolver equações e inequações graficamente; porém, nem sempre esse método é exato, pois pode não fornecer uma precisão adequada quando a solução é composta por números racionais com infinitas casas decimais (como as dízimas periódicas) ou por números irracionais. Nesses casos, o método gráfico é recomendado como aproximação.

As inequações logarítmicas podem ser entendidas como uma comparação entre duas funções. Essa ideia pode ser estendida às inequações de uma maneira geral. Portanto, para resolver inequações logarítmicas graficamente, comparamos os gráficos das funções associadas aos membros da inequação.

Por exemplo, para resolver a inequação logarítmica $\log (x + 6) > 1$, siga a sequência de passos a seguir.

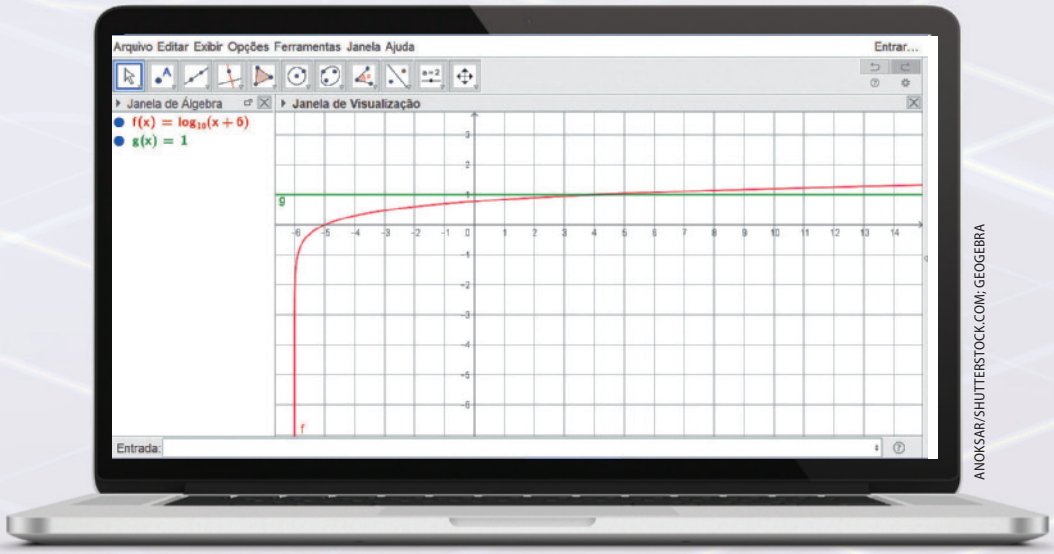
I. Vamos escrever o primeiro membro da inequação como a função $f(x) = \log (x + 6)$ e o segundo como a função $g(x) = 1$.

II. Para escrever o logaritmo decimal de um número no **GeoGebra**, utilizamos a função **lg(*x*)** ou **log 10(*x*)**. Portanto, no **Campo de entrada** digite $f(x) = \lg (x + 6)$ ou $f(x) = \log 10(x + 6)$ para construir a função $f(x) = \log(x + 6)$, em seguida, pressione a tecla ***Enter***. Para construir a função $g(x) = 1$, digite $g(x) = 1$ e pressione novamente ***Enter***.

PLUIE_R/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Assim, a **Janela de visualização** do **GeoGebra** fornecerá a seguinte construção:



ANOKSAR/SHUTTERSTOCK.COM; GEOGEBRA

III. Para determinar as coordenadas do ponto de intersecção, devemos utilizar a ferramenta **Intersecção de dois objetos**. Nesse caso, o ponto de intersecção é $A(4, 1)$.

IV. Observando o gráfico, vemos que, enquanto o valor de x for maior do que 4 (abscissa do ponto de intersecção), teremos $f(x) > g(x)$. Por outro lado, enquanto o valor de x for menor do que 4, teremos $g(x) > f(x)$ ou ainda $f(x) < g(x)$.

Como a inequação inicial é $\log (x + 6) > 1$, temos $f(x) > g(x)$, ou seja, para isso ocorrer, devemos ter $x > 4$.

Logo, a solução será todos os números reais maiores que 4, ou seja, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 4\}$.

SAIBA QUE...

Note que x não pode ser 4, pois nesse caso teríamos $f(x) = g(x)$, o que não contempla a situação inicial.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Utilizando o **GeoGebra**, determine o conjunto solução da inequação $\log (2x - 5) \leqslant 1$.

2. Crie um **Controle deslizante** e determine o valor de m para que o conjunto solução da inequação $\log (x + 4) < m$ seja $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$.

3. Utilizando o mesmo procedimento da atividade anterior, determine o valor de m para que a solução da inequação $\log_2 (x + 4) > m$ tenha apenas valores positivos.

Saúde

O uso de medicamentos requer cautela e não deve ser banalizado. O fácil acesso a eles tem gerado o seu uso incorreto, sendo o público jovem bastante afetado, uma vez que a mídia também exerce influência nesse mercado. Para saber um pouco mais sobre o assunto, leia o texto a seguir sobre medicamentos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

[...]

Medicamentos e os jovens

Usar medicamentos por conta própria também faz parte dos hábitos de diversos adolescentes em todo o mundo. Com o intuito de curar alguma doença, alcançar o bem-estar pessoal ou uma aparência física desejável, os jovens se tornaram adeptos dos mais diversos tipos de medicamentos, desde um comprimido para dor de cabeça, até calmantes, estimulantes ou antidepressivos. Tudo isso sem nenhum acompanhamento médico.

Quais os medicamentos mais consumidos?

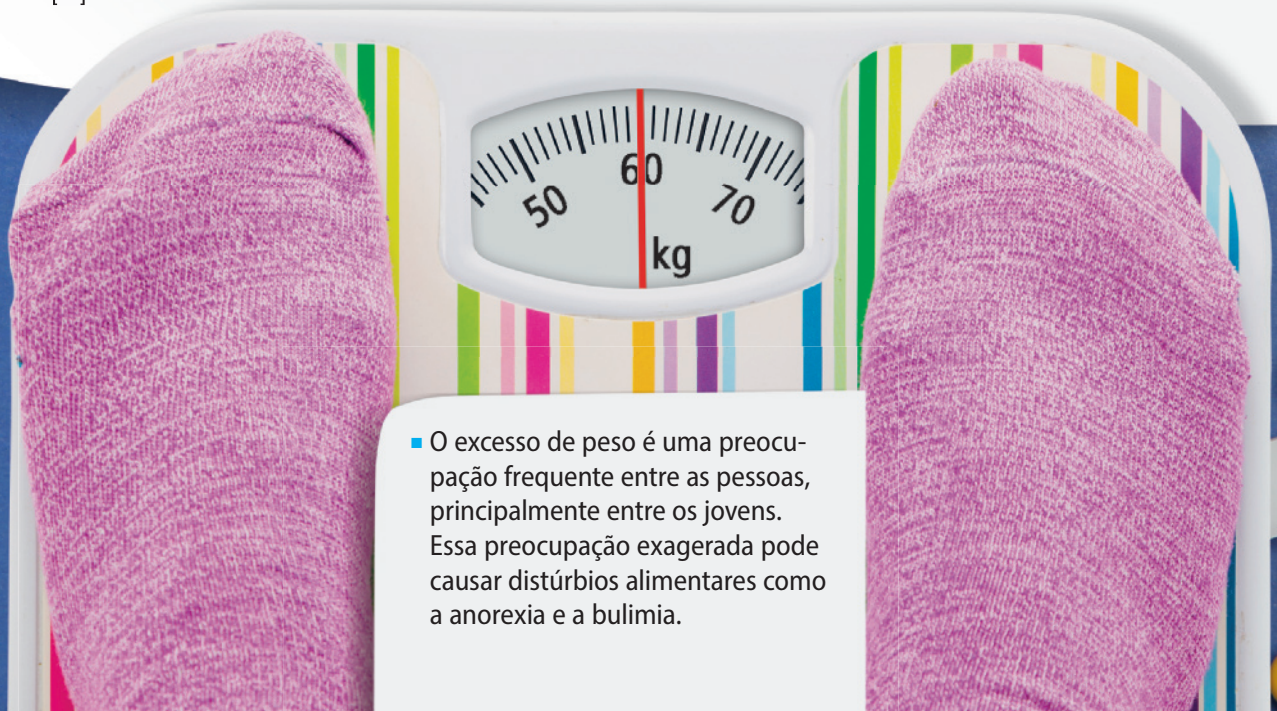
Entre os medicamentos mais consumidos pelos jovens estão os analgésicos e antibióticos, inalantes e tranquilizantes, medicamentos para emagrecimento e ansiedade, xaropes, anabolizantes e medicamentos para disfunção erétil.

Quais os riscos do uso indiscriminado de medicamentos pelos jovens?

Além dos riscos inerentes à automedicação, tal hábito quando praticado por jovens é ainda mais preocupante em função das misturas perigosas que eles costumam fazer, por exemplo:

- Alguns medicamentos tranquilizantes com álcool podem levar ao estado de coma e causar até mesmo a morte do usuário.
- Medicamentos para emagrecer (anorexígenos) com álcool e tabaco podem aumentar o risco de doenças cardíacas e respiratórias.

[...]



OKO LAA/SHUTTERSTOCK.COM

O excesso de peso é uma preocupação frequente entre as pessoas, principalmente entre os jovens. Essa preocupação exagerada pode causar distúrbios alimentares como a anorexia e a bulimia.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Medicamentos para emagrecer

Atualmente, tem sido muito comum a busca de uma solução rápida para combater o excesso de peso, como o uso de medicamentos para emagrecer, chamados anorexígenos. Esses medicamentos agem diminuindo o apetite, facilitando a perda de peso por determinado tempo.

Os anorexígenos apresentam algum tipo de risco?

Os anorexígenos são produtos de alto risco porque podem causar dependência e inúmeras reações indesejadas, como humor instável, depressão nervosa, irritabilidade, agitação, confusão mental, alucinações, dentre outras. A retirada brusca desse tipo de medicamento pode ser acompanhada de fadiga (cansaço), sonolência ou depressão. Por apresentarem riscos elevados, esses produtos são controlados por lei e somente os médicos podem prescrevê-los. [...]

Fonte: BRASIL. Ministério da Saúde. Anvisa. **O que devemos saber sobre medicamentos**. 1. ed. Brasília, DF, 2010. p. 66-67; 74. Disponível em: http://portal.anvisa.gov.br/documents/33836/2501339/O+que+devemos+saber+sobre+medicamentos/f462f5a1-53b1-4247-9116-a6bcd59cae6c. Acesso em: 17 ago. 2020.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Ver as **Orientações para o professor**.

1. Segundo o texto, qual é o problema retratado no consumo de medicamentos entre os jovens?

2. Conforme presente no texto, "atualmente, tem sido muito comum a busca de uma solução rápida para combater o excesso de peso".
A anorexia e a bulimia são dois transtornos alimentares muito comuns na sociedade atualmente, principalmente entre jovens. Pesquise cada um desses transtornos, listando suas diferenças e o tratamento correto que deve ser realizado em cada um deles. Em seguida, discuta com os colegas os resultados obtidos.

3. Dentre os problemas decorrentes da automedicação, está a ingestão excessiva de medicamentos. A concentração de um medicamento, ao entrar na corrente sanguínea, após ser metabolizado, diminui a uma taxa proporcional à quantidade ingerida e ao tempo decorrido. Suponha que a quantidade de determinado medicamento no organismo possa ser modelada pela função $M(t) = M_0\,(0{,}5)^t$, em que M_0 é a quantidade ingerida (em mg) e $M(t)$ é a quantidade do medicamento no organismo (em mg) decorridas t horas da ingestão. Se forem ingeridas 500 mg desse medicamento, após quanto tempo no organismo a quantidade da droga será igual a 90 mg? Considere $\log 2 \simeq 0{,}3$ e $\log 0{,}18 \simeq -0{,}74$.

WHITE BEAR STUDIO/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (UERJ) Admita que, em um determinado lago, a cada 40 cm de profundidade, a intensidade de luz é reduzida em 20%, de acordo com a equação $I = I_0 \cdot 0{,}8^{\frac{h}{40}}$, na qual I é a intensidade da luz em uma profundidade h, em centímetros, e I_0 é a intensidade na superfície. Um nadador verificou, ao mergulhar nesse lago, que a intensidade da luz, em um ponto P, é de 32% daquela observada na superfície. A profundidade de P, em metros, considerando $\log_2 = 0{,}3$, equivale a: alternativa **c**

a) 0,64 **c)** 2,0
b) 1,8 **d)** 3,2

2. (IFCE) Sejam $x, y \in \mathbb{R}$ com $x > 1$ e $y > 1$. A expressão $2\log_9 x + \log_3 6 - 6\log_9 \sqrt{y}$ pode ser simplificada para: alternativa **a**

a) $\log_9 \frac{36x^2}{y^3}$

b) $\log_3 \left(\frac{2x}{6\sqrt{y}} + 6\right)$

c) $\log_9 (2x + 6(1 - \sqrt{y}))$

d) $\log_3 (x^2 + 36 + y^{-3})$

e) $\log_3 (1 + 6xy)$

3. (IME-RJ) Se $\log_{10} 2 = x$ e $\log_{10} 3 = y$, então $\log_5 18$ vale: alternativa **a**

a) $\frac{x + 2y}{1 - x}$ **d)** $\frac{x + 2y}{1 + x}$

b) $\frac{x + y}{1 - x}$ **e)** $\frac{3x + 2y}{1 - x}$

c) $\frac{2x + y}{1 + x}$

4. (UFMG) O pH de uma solução aquosa é definido pela expressão $pH = -\log[H^+]$, em que $[H^+]$ indica concentração, em mol/l, de íons de hidrogênio na solução e log, o logaritmo na base 10.
Ao analisar uma determinada solução, um pesquisador verificou que, nela, a concentração de íons de hidrogênio era $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/l.
Para calcular o pH dessa solução, ele usou os valores aproximados de 0,30 para log 2, e de 0,48 para log 3. Então, o valor que o pesquisador obteve para o pH dessa solução foi: alternativa **a**

a) 7,26 **c)** 7,58
b) 7,32 **d)** 7,74

5. (UEPA) Por volta dos anos 80, durante a implantação do projeto Proálcool, uma montadora estimou que sua produção de carros a álcool teria um crescimento anual de acordo com a expressão: $P(t) = 10^5 \cdot \log_3 (t + 1)$, onde P é a quantidade produzida e t o número de anos. Dessa forma, daqui a 8 anos a produção estimada será de: alternativa **a**

a) 200 000 carros. **d)** 250 000 carros.
b) 220 000 carros. **e)** 300 000 carros.
c) 232 000 carros.

6. (UEG-GO) Sendo $f(x) = \log_{x-1}(x^2 + 1)$, então alternativa **e**

a) $x < -1$ e $x \neq -2$ **d)** $x > 1$
b) $x < 1$ **e)** $x > 1$ e $x \neq 2$
c) $-1 \leqslant x < 1$

7. (FGV-SP) Em uma máquina fotográfica, a abertura na lente, pela qual passa a luz, é indicada pela letra f. Admita que a fórmula que fornece a medida da luz (S) que passa pela abertura, em função do valor de f, para uma câmera de lente 35 mm, seja dada por $S = \log_2 f^2$.

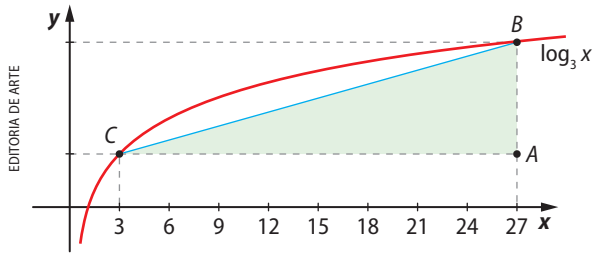
FGV-SP

A imagem indica uma lente 35 mm de abertura máxima igual a 1,4. Adotando $\log 2 = 0{,}301$ e $\log 7 = 0{,}845$, o valor de S para a abertura máxima dessa lente é, aproximadamente, alternativa **d**

a) 0,91. **c)** 0,95. **e)** 0,99.
b) 0,93. **d)** 0,97.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

8. (UFAM) Na figura a seguir a curva representa o gráfico da função $f(x) = \log_3 x$. A área do triângulo ABC é igual a: alternativa **b**



EDITORIA DE ARTE

a) 25 unidades de área.
b) 24 unidades de área.
c) 23 unidades de área.
d) 21 unidades de área.
e) 20 unidades de área.

9. (Fuvest-SP) Sobre a equação $(x + 3)2^{x^2-9} \log |x^2 + x - 1| = 0$, é correto afirmar que alternativa **e**

a) ela não possui raízes reais.
b) sua única raiz real é -3.
c) duas de suas raízes reais são 3 e -3.
d) suas únicas raízes reais são -3, 0 e 1.
e) ela possui cinco raízes reais distintas.

10. (UFMS) Questionada sobre a nota que tirou no exame final de matemática, Alice diz que sua nota é o resultado da equação $\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$. A nota do exame final varia de 0 a 10. Qual nota Alice tirou? alternativa **a**

a) 7. **c)** 5. **e)** 8.
b) 6. **d)** 9.

11. (UFPR) Um tanque contém uma solução de água e sal cuja concentração está diminuindo devido à adição de mais água. Suponha que a concentração $Q(t)$ de sal no tanque, em gramas por litro (g/L), decorridas t horas após o início da diluição, seja dada por

$$Q(t) = 100 \times 5^{-0,3t}$$

Assinale a alternativa que mais se aproxima do tempo necessário para que a concentração de sal diminua para 50 g/L. (Use $\log 5 = 0,7$) alternativa **d**

a) 4 horas e 45 minutos.
b) 3 horas e 20 minutos.
c) 2 horas e 20 minutos.
d) 1 hora e 25 minutos.
e) 20 minutos.

12. (Uneb-BA) Segundo uma pesquisa, após t meses da constatação da existência de uma epidemia, o número de pessoas, por ela atingidas, é obtido por $N(t) = \frac{10000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}}$.
Considerando-se que o mês tenha 30 dias, $\log 2 = 0,30$ e $\log 3 = 0,48$, pode-se estimar que 2 500 pessoas serão atingidas por essa epidemia em, aproximadamente, alternativa **a**

a) dez dias.
b) vinte e seis dias.
c) três meses.
d) dez meses.
e) um ano.

13. (Enem/MEC) Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões.
Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado. Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100 000 transistores distribuídos em 0,25 cm^2 de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com.
Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10} 2$. Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores? alternativa **c**

a) 1999
b) 2002
c) 2022
d) 2026
e) 2146

SAIBA QUE...

Se $|f(x)| \leq a \Rightarrow -a \leq f(x) \leq a$.

14. (Udesc-SC) O conjunto solução da inequação $|\log_3(3x)| \leq 1$ é: alternativa **c**

a) $S = \left[\frac{1}{3}, 3\right]$

b) $S = [1, 3]$

c) $S = \left[\frac{1}{9}, 1\right]$

d) $S = \left]0, \frac{1}{9}\right]$

e) $S =]0, 1]$

15. (Unicamp-SP) A solução da equação na variável real x, $\log_x(x + 6) = 2$, é um número alternativa **a**

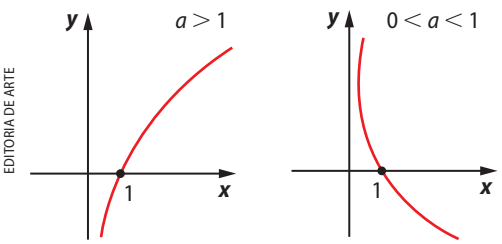
a) primo.

b) par.

c) negativo.

d) irracional.

16. (Fuvest-SP) Seja f uma função a valores reais, com domínio $D \subset \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_{10}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1)\right)$, para todo $x \in D$.



■ Gráficos da função logarítmica de base a.

O conjunto que pode ser o domínio D é: alternativa **a**

a) $\{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$

b) $\{x \in \mathbb{R}; x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1\}$

c) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{3} < x < 10\right\}$

d) $\left\{x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{1}{3} \text{ ou } x \geq 10\right\}$

e) $\left\{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{9} < x < \frac{10}{3}\right\}$

17. (Enem/MEC) Um contrato de empréstimo prevê que quando uma parcela é paga de forma antecipada, conceder-se-á uma redução de juros de acordo com o período de antecipação. Nesse caso, paga-se o valor presente, que é o valor, naquele momento, de uma quantia que deveria ser paga em uma data futura. Um valor presente P submetido a juros compostos com taxa i, por um período de tempo n, produz um valor futuro V determinado pela fórmula:

$$V = P \cdot (1+i)^n$$

Em um contrato de empréstimo com sessenta parcelas fixas mensais, de R$ 820,00, a uma taxa de juros de 1,32% ao mês, junto com a trigésima parcela será paga antecipadamente uma outra parcela, desde que o desconto seja superior a 25% do valor da parcela.

Utilize 0,2877 como aproximação para $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$ e 0,0131 como aproximação para ln (1,0132).

A primeira das parcelas que poderá ser antecipada junto com a 30ª é a alternativa **c**

a) 56ª **c)** 52ª **e)** 45ª

b) 55ª **d)** 51ª

18. (Enem/MEC) Para realizar a viagem dos sonhos, uma pessoa precisava fazer um empréstimo no valor de R$ 5.000,00. Para pagar as prestações, dispõe de, no máximo, R$ 400,00 mensais. Para esse valor de empréstimo, o valor da prestação (P) é calculado em função do número de prestações (n) segundo a fórmula

$$P = \frac{5000 \times 1{,}013^n \times 0{,}013}{\left(1{,}013^n - 1\right)}$$

Se necessário, utilize 0,005 como aproximação para log 1,013; 2,602 como aproximação para log 400; 2,525 como aproximação para log 335.

De acordo com a fórmula dada, o menor número de parcelas cujos valores não comprometem o limite definido pela pessoa é

a) 12 **c)** 15 **e)** 17

b) 14 **d)** 16 alternativa **d**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

19. (Santa Casa-SP) O Nível de Pressão Sonora (*NPS*) é uma medida que determina o grau de potência de uma onda sonora, sendo o decibel (dB) sua unidade de medida mais usual. O infográfico traz dados do *NPS* de alguns sons:

(http://noticias.r7.com. Adaptado.)

O *NPS*, em dB, de um som emitido está relacionado à sua Intensidade Sonora (I), em W/m^2, pela seguinte lei:

$$NPS = 120 + 10 \cdot \log I$$

Desse modo, a razão entre a intensidade sonora do ronco mais alto já registrado e a do ronco moderado, nessa ordem, é um valor entre

a) 10 e 100.

b) 1 e 10.

c) 100 e 1 000.

d) 10 000 e 100 000. alternativa **d**

e) 1 000 e 10 000.

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, estudamos o logaritmo, sua definição e suas propriedades. Além disso, vimos algumas de suas aplicações, como no cálculo do pH e do nível de intensidade sonora. Estudamos, também, a função logarítmica, sua relação com a função exponencial e como construir gráfico da função logarítmica utilizando-se dessa relação.

No Capítulo, também há o o estudo da equação e da inequação logarítmica.

Nas páginas de abertura, foi apresentada a unidade de medida da intensidade sonora e uma reflexão sobre a importância de saber medi-la com o intuito de representar a presença da Matemática na preservação da saúde. Você conseguiu reconhecer essa relação? Se sim, qual a importância dela? Se não, retome o texto de abertura de Capítulo e as perguntas iniciais. Se possível, pesquise também em livros, revistas, jornais e *sites* sobre o assunto.

Vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **3**:

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados ao longo deste Capítulo? Qual? Resposta pessoal.
- Qual a condição para que uma função logarítmica seja crescente? E decrescente? base a maior do que 1; base a entre 0 e 1
- Pesquise uma aplicação de logaritmo que não tenha sido apresentada neste Capítulo e explique, com suas palavras, essa aplicação e sua relação com o logaritmo. Resposta pessoal.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO

4

Progressões

A BNCC NESTE CAPÍTULO:

- **Competências gerais da BNCC:** 3, 5, 7 e 10
- **Competências específicas e habilidades da área de Matemática e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 3: EM13MAT315
  - Competência específica 4: EM13MAT405
  - Competência específica 5: EM13MAT507 e EM13MAT508
- **Competências específicas da área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias:**
  - Competência específica 2
  - Competência específica 3

O texto na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades da BNCC citadas encontra-se ao final do livro.

Os *sona* são desenhos feitos na areia e carregam histórias de algumas tribos africanas. Foram estudados por antropólogos e matemáticos que revelaram ao mundo essa arte repleta de tradição e conceitos matemáticos, como simetrias e sequências.

O holandês Paulus Gerdes (1952-2014), matemático e pesquisador, estudou algumas manifestações matemáticas de povos tribais de regiões da África e da América Latina, em países como Angola e Peru. A motivação do pesquisador para esse estudo se deu à medida em que ele percebeu que os estudantes, dos cursos em que Gerdes ministrava aulas, não compreendiam alguns conceitos que eram estudados, pois não estavam familiarizados com a linguagem matemática utilizada. Ao entrar em contato com a cultura local desses estudantes, ele conheceu os *sona*, desenhos na areia feitos pelos homens e pelos chefes de uma tribo chamada Tchokwe.

Esses desenhos representavam histórias de caça, animais e seres místicos importantes para a tribo, além de objetos do cotidiano. No entanto, Gerdes reparou que havia muito mais do que apenas linhas no chão: cada *lusona* (singular de *sona*) exibia muitas propriedades matemáticas, principalmente aritméticas e geométricas. Com essa descoberta, Gerdes estudou mais a cultura dos tchokwe e percebeu que conceitos matemáticos eram usados de maneira intuitiva nesses desenhos, de tal forma que poderia utilizar os *sona* em suas aulas, pois eram mais próximos da realidade de seus estudantes.

Fonte dos dados: SANTOS, D. F. dos. **Geometria africana**: uma abordagem etnomatemática para o ensino de matemática. TCC (Licenciatura em Matemática) – IFSP, São Paulo, 2017. Disponível em: http://eadcampus.spo.ifsp.edu.br/pluginfile.php/118729/mod_resource/content/0/TCC_Dayene_Ferreira_dos_Santos_1468103_2sem_2017_ifsp.pdf. Acesso em: 2 jul. 2020.

Máscara utilizada em tradições do povo tchokwe.

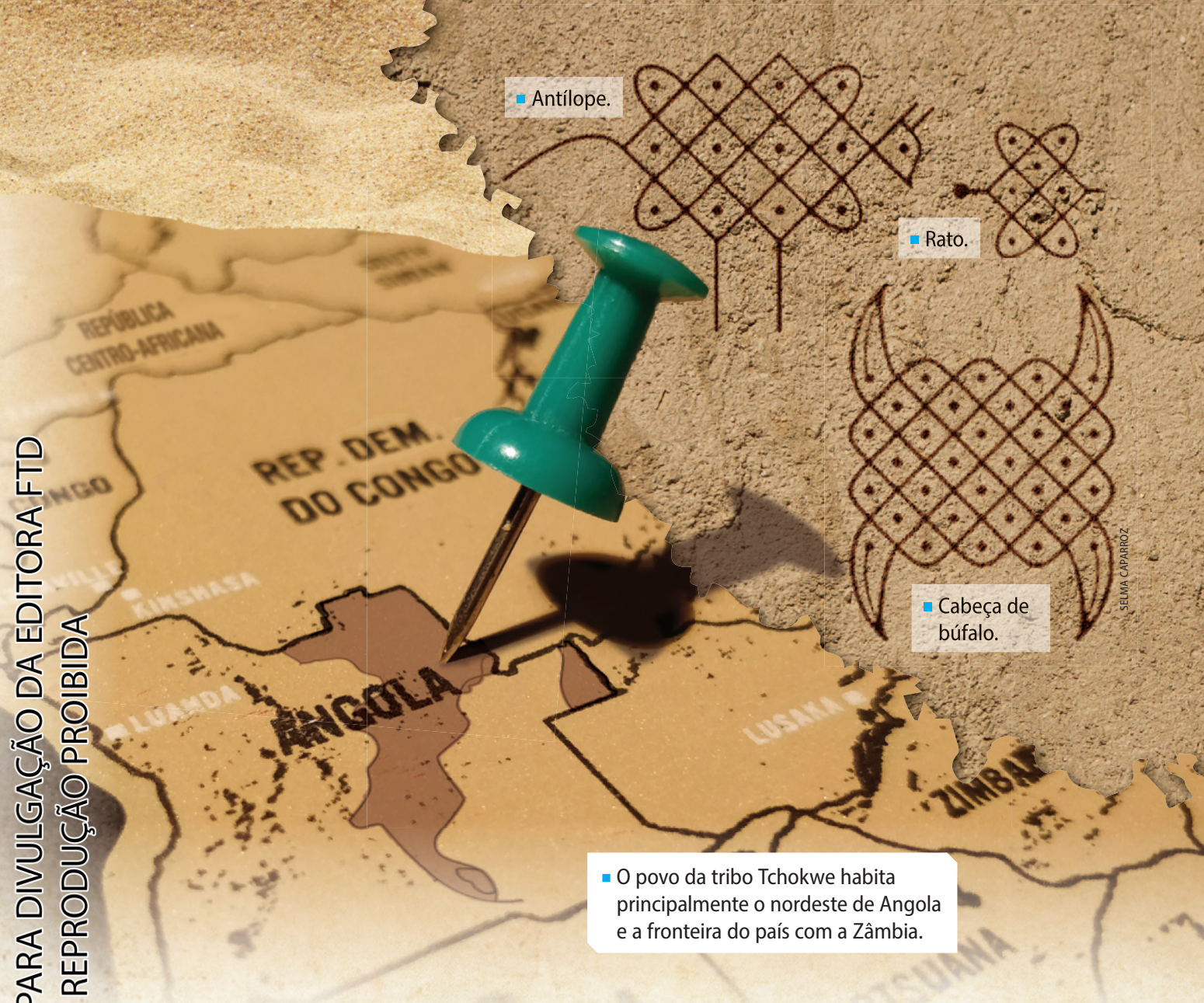
PARA ASSISTIR

Veja mais informações sobre as figuras *sona*, sua história e sua construção no vídeo sugerido.

GEOMETRIA *sona*: técnicas matemáticas do continente africano. Vídeo (2min53s). Publicado pelo canal Mwana Afrika. Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=HQYdqv8oGWQ. Acesso em: 2 jul. 2020.

ANDRE SILVA PINTO/SHUTTERSTOCK.COM; EDITORIA DE ARTE; SIMON LAPRIDA/SHUTTERSTOCK.COM; SIMON LAPRIDA/SHUTTERSTOCK.COM; EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA



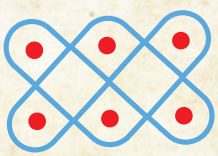
Observe que os *sona* estão em sequência e cada elemento da sequência é desenhado seguindo uma mesma regra. A quantidade de pontos desses *sona* está relacionada com sua posição na sequência.

O *lusona* **1** tem uma linha com duas bolinhas; o *lusona* **2** tem duas linhas com três bolinhas em cada uma; o *lusona* **3** tem três linhas com quatro bolinhas em cada uma e assim por diante.

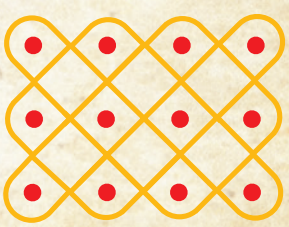
Agora reúna-se a mais dois colegas, e façam o que se pede em cada item.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1º elemento



2º elemento



3º elemento

EDITORIA DE ARTE

1. Vocês já viram algum desenho parecido com esse? Pesquisem para saber mais a respeito dos *sona* e como os chefes das tribos os desenham.
Resposta pessoal.
2. Considerando a sequência de *sona* apresentada, o 4º elemento da sequência deve ter quantas linhas? Quantas bolinhas deve haver em cada uma delas?
4 linhas com 5 bolinhas em cada uma
3. Procurem criar uma regra que determine a quantidade de linhas de um *lusona* e a quantidade de bolinhas em cada linha, de acordo com a posição do elemento na sequência. É possível fazer isso?
Resposta esperada: Sim; para um elemento na posição *n*, o *lusona* deve ter *n* linhas com *n* + 1 bolinhas em cada uma.

Introdução

O matemático italiano Leonardo de Pisa (c. 1170-1250), conhecido como Fibonacci, por volta de 1202, associou uma importante sequência numérica ao crescimento de uma população de coelhos. Nessa sequência, os termos são obtidos pela seguinte regra: o primeiro número é 1, o segundo também é 1, e cada um dos demais termos da sequência é obtido pela adição dos dois termos que o antecedem. A partir dessa regra, obtemos a sequência (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...), que embora já tivesse sido explorada na Antiguidade, ficou conhecida como **sequência de Fibonacci**.

Existe uma relação interessante entre essa sequência e a razão áurea ($\phi = 1{,}618033...$): à medida que aumentamos a quantidade de termos da sequência de Fibonacci, a razão entre um termo dessa sequência e o termo anterior varia em torno de ϕ, aproximando-se cada vez mais desse valor. Observe:

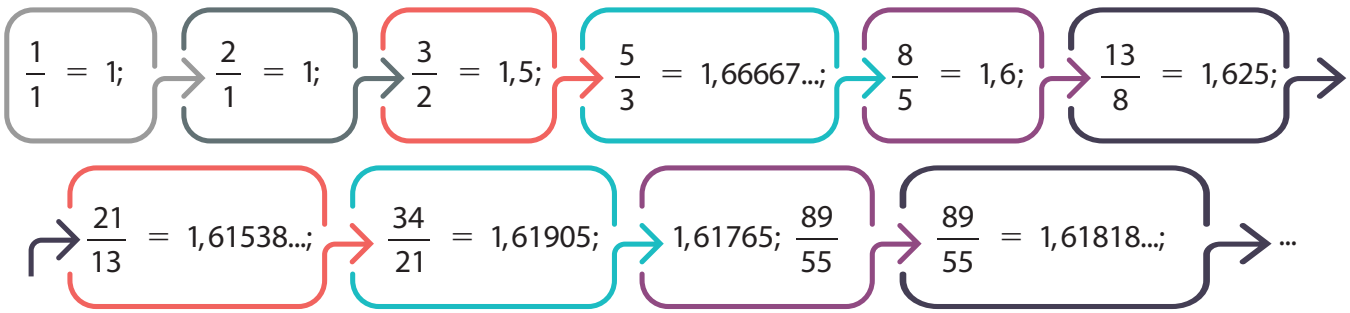
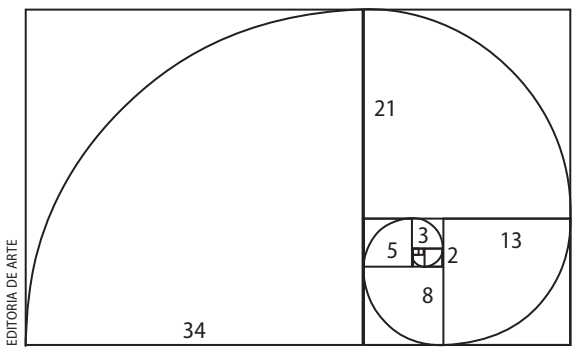


IMAGEM: SHUTTERSTOCK.COM

A forma espiral observada, por exemplo, na concha de um caramujo, no chifre de um carneiro ou na orelha de um ser humano, também guarda relação com essa sequência, uma vez que se assemelham a uma espiral formada por "quartos" de circunferência, cujos raios crescem de maneira proporcional aos números da sequência de Fibonacci. Essa forma espiral, observada nos seres vivos e na natureza, também é encontrada nas artes, na arquitetura e em outras áreas do conhecimento.



EDITORIA DE ARTE

- Os raios dos arcos de circunferência que compõem essa espiral são, respectivamente, os primeiros nove números da sequência de Fibonacci.

SAIBA QUE...

Por volta de 1202, Fibonacci publicou a obra **Liber abaci**, que, além de expor processos algorítmicos e aritméticos, apresentava problemas muito intrigantes. Um desses desafios, conhecido como "o problema dos coelhos", deu origem à sequência de Fibonacci e objetivava, basicamente, descobrir quantos pares de coelhos poderiam ser gerados em um ano, a partir de um único casal de coelhos.

Neste Capítulo, estudaremos o conceito de sequência numérica e veremos duas sequências com propriedades especiais: a progressão aritmética (PA) e a progressão geométrica (PG).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Sequências

SANDA STANCA/EYEEM/GETTY IMAGES

No nosso cotidiano lidamos com diferentes situações que envolvem sequências. Por exemplo:

a) Os dias da semana: domingo, segunda-feira, terça-feira, ..., sábado.

b) Os meses do ano: janeiro, fevereiro, março, ..., dezembro.

c) O ano de ocorrência dos Jogos Olímpicos da Era Moderna: 1896, 1900, 1904, 1908, ..., 2012, 2016, ...

Cada elemento que compõe uma sequência é chamado **termo da sequência**.

Cada termo de uma sequência pode ser representado por uma **letra** acompanhada de um **índice**, que informa a posição ou a ordem desse termo na sequência. Por exemplo, considerando a sequência de Fibonacci, temos:

- $a_1 = 1$ é o primeiro termo ou o termo de ordem 1;
- $a_2 = 1$ é o segundo termo ou o termo de ordem 2;
- $a_3 = 2$ é o terceiro termo ou o termo de ordem 3;
- $a_4 = 3$ é o quarto termo ou o termo de ordem 4; e assim por diante.

Podemos representar genericamente uma sequência da seguinte maneira:

$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$

Nessa representação, utilizamos a_n para indicar o termo de ordem n e dizemos que a_n é o enésimo termo da sequência.

Sequências numéricas

Veja que é possível estabelecer sequências com informações numéricas ou não. Neste Capítulo, trataremos das sequências do primeiro tipo, chamadas **sequências numéricas**.

Podemos classificar esse tipo de sequência em relação à quantidade de elementos: uma sequência numérica pode ser **finita** ou **infinita**. Desse modo, podemos pensar nesses tipos de sequências da maneira a seguir.

Uma sequência numérica finita de n termos, representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n)$, é uma função cujo domínio é o conjunto $\{1, 2, 3, 4, ..., n\}$, e o contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, ..., $f(n) = a_n$.

Por exemplo, a sequência numérica (3, 5, 7, 9) é uma sequência finita, na qual $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$ e $a_4 = 9$.

Uma sequência numérica infinita, representada por $(a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, ...)$, é uma função cujo domínio é $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$, e o contradomínio é o conjunto dos números reais, tal que $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, ..., $f(n) = a_n$, ...

Por exemplo, a sequência dos números ímpares (1, 3, 5, 7, 9, ...) é uma sequência infinita, em que $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 7$, $a_5 = 9$, ...

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Determinação dos elementos de uma sequência numérica

Algumas sequências numéricas podem ser determinadas por uma lei de formação, isto é, conhecendo os primeiros termos de uma sequência, podemos encontrar sua lei de formação e determinar seus elementos. Vamos estudar duas maneiras de fazer isso: por **recorrência** e pelo **termo geral**.

Recorrência

Quando conhecemos o valor do termo inicial (ou de alguns dos termos iniciais) e a lei que permite calcular os termos seguintes depende dos termos anteriores, dizemos que a sequência está definida por **recorrência**.

Observe a sequência de Fibonacci: (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...). Vimos que o primeiro e o segundo termo dessa sequência são iguais a 1 e que, a partir do terceiro, os termos são obtidos com a adição dos dois termos imediatamente anteriores:

- $a_1 = a_2 = 1$
- $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$
- $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$
- $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$
- $a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$

⋮ ⋮ ⋮

Assim, a sequência de Fibonacci pode ser obtida por meio da lei de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \ (com\ n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Por exemplo, podemos determinar o 7º termo dessa sequência substituindo n por 5 na lei de recorrência:

$a_{5+2} = a_{5+1} + a_5 \Rightarrow a_7 = a_6 + a_5 \Rightarrow a_7 = 8 + 5 \Rightarrow a_7 = 13$

Termo geral

Seja uma sequência dada pela função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa, por meio de uma expressão matemática, cada número $n \in \mathbb{N}^*$ a um número $a_n \in \mathbb{R}$. Essa expressão é chamada de **termo geral** ou **lei de formação da sequência**.

Observe que a sequência dada pela função f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ que associa cada número $n \in D(f)$ ao seu triplo pode ser representada por (3, 6, 9, 12, ...):

- para $n = 1$, $a_1 = 3 \cdot 1 = 3$
- para $n = 2$, $a_2 = 3 \cdot 2 = 6$
- para $n = 3$, $a_3 = 3 \cdot 3 = 9$
- para $n = 4$, $a_4 = 3 \cdot 4 = 12$

⋮ ⋮ ⋮

- para $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 3 \cdot n = 3n$

PENSE E RESPONDA

Pesquise sobre a sequência de Fibonacci e dê exemplos de onde ela aparece, na natureza e em construções feitas pelo ser humano.

Ver as **Orientações para o professor**.

Assim, a sequência dos números múltiplos de 3 pode ser obtida por meio do termo geral (ou lei de formação da sequência): $a_n = 3n$.

Por exemplo, podemos determinar o centésimo termo dessa sequência, substituindo n por 100 no termo geral:

$$a_n = 3n \Rightarrow a_{100} = 3 \cdot 100 \Rightarrow a_{100} = 300$$

PENSE E RESPONDA

Explique, com suas palavras, a diferença entre as duas maneiras de determinar os termos de uma sequência. Dê um exemplo de cada tipo.

Ver as **Orientações para o professor**.

ATIVIDADE RESOLVIDA

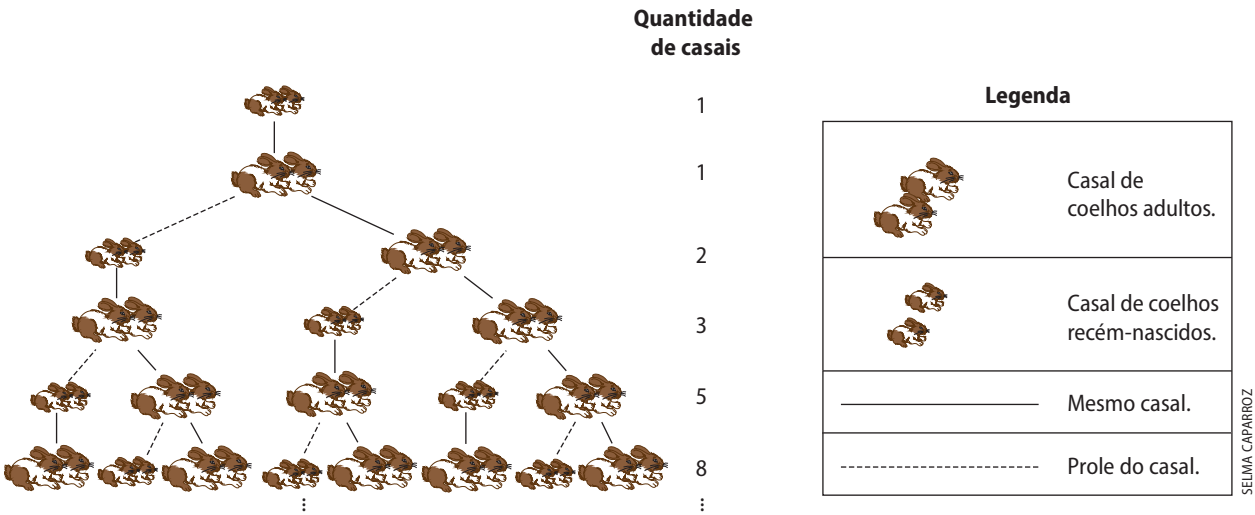
1. Os coelhos se reproduzem mais rapidamente que a maioria dos mamíferos. Considere a seguinte situação que foi estudada por Fibonacci: um casal de coelhos pode reproduzir-se apenas depois do segundo mês de vida e, a partir daí, gerar um novo casal por mês. Começando com apenas um casal recém-nascido, quantos casais de coelhos existirão ao fim do:

a) quinto mês?

b) oitavo mês?

Resolução

Observe o esquema que exemplifica a situação apresentada no problema (imagem sem escala; cores-fantasia).



a) Seja n o mês e a_n a quantidade de casais de coelhos existentes no mês em questão.

No primeiro mês ($n = 1$), o casal ainda é filhote; portanto, não se reproduz, ou seja, $a_1 = 1$.

No segundo mês ($n = 2$), o casal se torna adulto, mas ainda não se reproduz; assim, $a_2 = 1$.

No terceiro mês ($n = 3$), o casal se reproduz, gerando um novo casal, ou seja, $a_3 = 2$.

No quarto mês ($n = 4$), o casal adulto gera outro casal de filhotes, e o casal de filhotes se torna adulto, ou seja, $a_4 = 3$.

No quinto mês ($n = 5$), temos dois casais adultos, que gerarão filhotes, e um casal de filhotes que se tornará adulto; assim, $a_5 = 3 + 2 = 5$.

Portanto, a quantidade de casais de coelhos no fim do quinto mês será 5.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

b) A quantidade de casais de coelhos ao longo dos meses obedece à sequência de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5... Portanto, para $n \geqslant 3$, podemos definir que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Substituindo n por 6, 7 e 8 na lei de recorrência $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, temos:

$n = 6 \Rightarrow a_6 = a_{6-1} + a_{6-2} \Rightarrow a_6 = 5 + 3 = 8$

$n = 7 \Rightarrow a_7 = a_{7-1} + a_{7-2} \Rightarrow a_7 = 8 + 5 = 13$

$n = 8 \Rightarrow a_8 = a_{8-1} + a_{8-2} \Rightarrow a_8 = 13 + 8 = 21$

Portanto, a quantidade de casais de coelhos no fim do oitavo mês será 21.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Represente as sequências dadas pelos termos gerais, com $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_n = 3n - 1$ (2, 5, 8, 11, ...)

b) $a_n = 2^{n-1}$ (1, 2, 4, 8, ...)

c) $a_n = 1 + (-1)^n$ (0, 2, 0, 2, ...)

d) $a_n = n^2 - 1$ (0, 3, 8, 15, ...)

2. Considere $a_n = 3n + 1$ o termo geral de uma sequência numérica.

a) Calcule o quinto e o oitavo termos dessa sequência. $a_5 = 16$; $a_8 = 25$

b) Determine a ordem (posição) do termo igual a 49. 16ª

c) Verifique se 1001 é um termo dessa sequência. não

3. Considerando que os números ímpares positivos podem ser determinados pela função $f(n) = 2n - 1$, com $n \in \mathbb{N}^*$, responda:

a) Qual é o 100° número ímpar positivo? 199

b) O número 99 ocupa que posição nessa sequência? 50ª

c) Calcule: $f(1) + f(7)$, $f(2) + f(6)$ e $f(3) + f(5)$.

O que você pode observar? Explique.
Ver as **Orientações para o professor**.

4. Represente as sequências dadas pelas fórmulas de recorrência, com $n \in \mathbb{N}^*$:

a) $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2a_n - 5$ (3, 1, −3, −11, ...)

b) $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = (a_n)^2$ (2, 4, 16, 256, ...)

c) $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \dfrac{1}{a_n}$ $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

d) $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$ $\left(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}+1}, \ldots\right)$

Resposta pessoal.
- Agora, descreva, com suas palavras, a recorrência de cada item. Em seguida, troque as respostas com um colega. Vocês descreveram da mesma forma? Há ajustes para serem feitos nas descrições feitas por vocês?

5. (FGV-SP) Um agricultor planta macieiras em um terreno quadrado. Com o objetivo de proteger as maçãs do vento, planta pinheiros ao redor da totalidade do pomar. O esquema abaixo mostra a colocação das macieiras e dos pinheiros para qualquer número n de fileiras de macieiras.

a) Escreva duas fórmulas, ambas em termos de n, uma para calcular o número de macieiras e a outra para calcular o número de pinheiros. n^2; $8n$

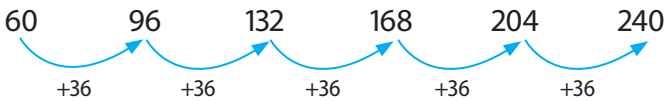
b) A partir de que valor de n, o número de macieiras se torna maior que o número de pinheiros?
a partir de $n = 9$

Progressão aritmética

Mariana replantou uma muda de árvore que estava com 60 cm de altura. Para estudar seu crescimento, ela mediu e anotou a altura da planta nos cinco meses seguintes. Veja as medidas obtidas.

Mês	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Altura (cm)	60	96	132	168	204	240

Observando as alturas registradas, Mariana percebeu que a planta cresceu cerca de 36 centímetros por mês.



Podemos indicar os valores da altura da árvore de Mariana, de acordo com a ordem dos meses de observação, como a sequência numérica (60, 96, 132, 168, 204, 240). Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é obtido pela soma do termo anterior a 36. Essa sequência é um exemplo de **progressão aritmética** (**PA**).

Progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é obtido pela adição do termo anterior a uma constante r, chamada de **razão** da progressão.

Podemos classificar uma PA de acordo com o valor da razão r:

- se $r > 0$, a PA é chamada de **crescente**;
- se $r < 0$, a PA é chamada de **decrescente**;
- se $r = 0$, a PA é chamada de **constante**.

Como a razão de uma progressão aritmética é a constante r que adicionamos a cada termo para obter o termo seguinte, podemos determiná-la, a partir do segundo termo, calculando a diferença entre cada termo e o anterior.

Assim, dada uma PA genérica infinita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, temos:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = a_5 - a_4 = ... = \boxed{a_{n+1} - a_n = r}$$

Vale ressaltar que o mesmo raciocínio vale para uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1})$.

Veja alguns exemplos:

a) (2, 5, 8, 11, 14) é uma PA cuja razão é: $r = 3$, pois $a_5 - a_4 = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = r = 3$. Portanto, essa PA é crescente.

b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{7}{3}, 2, \frac{5}{3}, ...\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = -\frac{1}{3}$, pois $a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = r = -\frac{1}{3}$. Portanto, essa PA é decrescente.

c) $\left(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, \sqrt{3}, ...\right)$ é uma PA cuja razão é: $r = 0$, pois todos os termos são iguais. Portanto, essa PA é constante.

SAIBA QUE...

Observe o exemplo da PA do item **a**. Se escrevermos a sequência ao contrário, isto é, (14, 11, 8, 5, 2), a razão será −3. Note que as progressões aritméticas (2, 5, 8, 11, 14) e (14, 11, 8, 5, 2) não são as mesmas. Esse fato exemplifica uma característica importante das sequências: a ordem em que os elementos são escritos determina a sequência.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

FÓRUM

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Restauração florestal

[...]

A restauração florestal é a recomposição da vegetação com espécies nativas, com o objetivo de levar equilíbrio à natureza e deixar a área o mais próximo possível de sua situação original. [...]

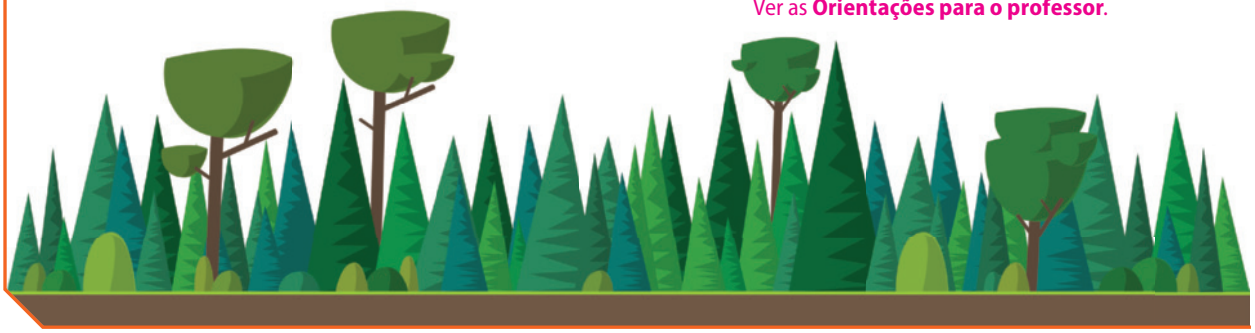
Antes de começar a fazer a restauração de uma área, deve-se primeiramente analisá-la e avaliar as condições do solo, do relevo, a elevação do nível do rio, a escolha da espécie mais adequada, o seu ciclo de vida e a escolha do método de restauração a ser adotado em relação à situação da área a ser recuperada.

[...]

JUSTULIN, B. F. **Guia de mudas nativas utilizadas na restauração da Bacia Tietê-Jacaré**. Jaú: Instituto Pró-Terra, 2015. Disponível em: http://www.institutoproterra.org.br/attach/upload/guiademudasnativasbh-tj.pdf. Acesso em: 6 jul. 2020.

- Pesquise com os colegas diferentes projetos de restauração florestal. Depois, promovam um fórum para debater a importância da preservação das florestas brasileiras e as principais iniciativas (públicas e privadas) voltadas ao replantio de mudas nativas em áreas verdes degradadas.

Ver as **Orientações para o professor**.



BUKHAVETS MIKHAIL/SHUTTERSTOCK.COM

Agora, considere três termos consecutivos de uma PA. O termo central entre esses três é dado pela média aritmética entre os outros dois termos. De fato, podemos escrever $a_n = a_{n-1} + r$ (I) e $a_n = a_{n+1} - r$ (II). Adicionando membro a membro (I) e (II), temos:

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} - r + r \Rightarrow 2a_n = a_{n-1} + a_{n+1} \Rightarrow a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

Por exemplo, dada a PA (2, 5, 8, 11, 14), temos:

$$a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2} = \frac{2+8}{2} = 5 \text{ e } a_3 = \frac{a_2 + a_4}{2} = \frac{5+11}{2} = 8$$

Termo geral de uma PA

Vamos considerar a representação genérica de uma progressão aritmética infinita, de razão r, dada por:

$$(a_1, \underset{+r}{a_2}, \underset{+r}{a_3}, \underset{+r}{a_4}, \ldots, \underset{+r}{a_{n-1}}, \underset{+r}{a_n}, \underset{+r}{a_{n+1}}, \ldots)$$

De acordo com essa sequência, temos:

- $a_2 = a_1 + 1 \cdot r$
- $a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2 \cdot r$
- $a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3 \cdot r$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observe que há uma relação entre o índice do termo e o fator que multiplica a razão da progressão:

- $a_2 = a_1 + 1 \cdot r = a_1 + (2 - 1) \cdot r$
- $a_3 = a_1 + 2 \cdot r = a_1 + (3 - 1) \cdot r$
- $a_4 = a_1 + 3 \cdot r = a_1 + (4 - 1) \cdot r$

Uma vez que essa relação também vale para uma PA genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1})$, é possível perceber que o enésimo termo de uma PA qualquer pode ser escrito como a soma do primeiro termo com o produto da razão pelo fator $(n - 1)$. Portanto:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

em que:
a_n é o termo geral (ou enésimo termo);
a_1 é o primeiro termo;
n é a ordem do termo;
r é a razão.

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral da PA**.

PARA OUVIR

A Série Cultura apresenta uma história que trata de progressão aritmética, inspirada no livro **Alice no País das Maravilhas**, de Lewis Caroll. A história é dividida em duas partes e narra o diálogo entre a jovem Alice e o *hippie* Tejaire.

MATEMÁTICA Multimídia: pensando em progressão aritmética. Série Cultura. Roteiro: Fernando M. Collaço. Campinas: Unicamp.[S. d.]. *Podcast*. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1256. Acesso em: 26 jun. 2020.

Também é possível obter a fórmula conhecendo a PA. Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PA (1, 4, 7, 10, ...). Para isso, devemos obter a razão da PA:

$$r = a_2 - a_1 = 4 - 1 = 3$$

Então, a PA dada tem $r = 3$ e $a_1 = 1$.

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, temos:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 1 + (n - 1) \cdot 3 \Rightarrow a_n = 3n - 2$$

Portanto, o termo geral da PA (1, 4, 7, 10, ...) é $a_n = 3n - 2$.

SAIBA QUE...

Em situações específicas que envolvem termos consecutivos de uma PA, é interessante recorrer a uma representação conveniente. Veja os exemplos:

- três termos consecutivos:

$x - r, x, x + r$

- cinco termos consecutivos:

$x - 2r, x - r, x, x + r, x + 2r$

SAIBA QUE...

No exemplo, 3 é a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos da PA.

PIXELDREAMS.EU/SHUTTERSTOCK.COM

Soma dos termos de uma PA

Considere a PA (6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34). Nela, podemos destacar as seguintes informações:

- 6 e 34 são os termos **extremos** cuja soma é 40;
- as duplas 10 e 30, 14 e 26, 18 e 22 são termos equidistantes dos extremos; a soma de cada dupla equidistante também é 40.

Essa é uma propriedade das progressões aritméticas finitas: a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual à soma dos extremos.

Demonstração

Seja (a_n) uma PA genérica finita dada por $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Somando os dois extremos, temos:

$$a_1 + a_n = a_1 + \underbrace{a_1 + (n-1)\cdot r}_{a_n} = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Os termos a_2 e a_{n-1} são equidistantes; portanto, sua soma é:

$$a_2 + a_{n-1} = \underbrace{a_1 + r}_{a_2} + \underbrace{a_1 + (n-2)\cdot r}_{a_{n-1}} = 2a_1 + (n-2+1)\cdot r = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Da mesma forma, os termos a_3 e a_{n-2} são equidistantes, portanto:

$$a_3 + a_{n-2} = \underbrace{a_1 + 2r}_{a_3} + \underbrace{a_1 + (n-3)\cdot r}_{a_{n-2}} = 2a_1 + (n-3+2)\cdot r = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Repare que as somas entre os termos equidistantes são iguais. Assim, generalizando, temos:

$$\underbrace{a_{p+1} + a_{n-p}}_{\text{termos equidistantes dos extremos}} = \underbrace{a_1 + (p+1-1)\cdot r}_{a_{p+1}} + \underbrace{a_1 + (n-p-1)\cdot r}_{a_{n-p}} = 2a_1 + (n-p-1+p)\cdot r = 2a_1 + (n-1)\cdot r$$

Portanto: $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ... = a_{p+1} + a_{n-p}$

Usando essa propriedade, vamos obter a fórmula que permite calcular a soma dos n termos de uma progressão aritmética finita.

Considere a PA finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-2}, a_{n-1}, a_n)$ e S_n a soma dos termos dessa PA.

$$\begin{array}{rl} & S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \\ + & \underline{S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1} \\ & 2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Como cada dupla de termos, a_2 e a_{n-1}, a_3 e a_{n-2}, e assim sucessivamente, é equidistante dos extremos, suas somas são iguais a $(a_1 + a_n)$. Logo:

$$2S_n = \underbrace{(a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)}_{n \text{ parcelas}}$$

$$2S_n = (a_1 + a_n)n \Rightarrow \boxed{S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}}$$

em que:

S_n é a soma dos n termos; a_n é o enésimo termo;

a_1 é o primeiro termo; n é o número de termos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Progressão aritmética e função afim

Você já parou para pensar como a progressão aritmética e a função afim podem estar relacionadas? Vamos ver a seguir como isso acontece.

As funções afins são definidas pela lei $y = ax + b$, com a e b reais.

Considerando o domínio de uma função f os números naturais não nulos, a lei que relaciona qualquer $n \in D(f)$ a $f(n)$ é $f(n) = cn + d$ e podemos escrever:

- para $n = 1 \Rightarrow f(1) = 1c + d = c + d = a_1$
- para $n = 2 \Rightarrow f(2) = 2c + d = c + (c + d) = c + a_1 = a_2$
- para $n = 3 \Rightarrow f(3) = 3c + d = c + (2c + d) = c + a_2 = a_3$

⋮ ⋮ ⋮

Assim, obtemos:

$f(n) = cn + d = a_n$

$f(n + 1) = c(n + 1) + d = a_{n+1}$, ou seja, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... formam uma PA de razão c.

SAIBA QUE...

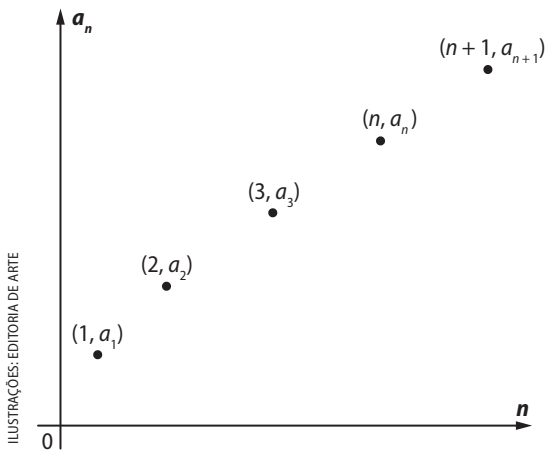
Para indicar os coeficientes da função f usamos as letras c e d ao invés das usuais a e b para não confundir com os termos da PA: a_1, a_2, a_3...

PENSE E RESPONDA

- No gráfico que representa uma PA, podemos traçar uma reta contínua ligando os pontos?
- Podemos dizer que os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, ..., (n, a_n), $(n + 1, a_{n+1})$, ... estão alinhados? Justifique sua resposta.
- Como seria o gráfico de uma PA decrescente, ou seja com razão negativa?

Ver as **Orientações para o professor**.

Veja como fica o gráfico de f quando $c > 0$.



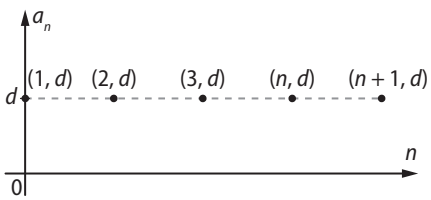
ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Calculando a diferença entre a_{n+1} e a_n, temos:

$a_{n+1} - a_n = c(n + 1) + d - (cn + d) = cn + c + d - cn - d = c$.

Logo, considerando a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, a diferença entre cada termo e o anterior é constante e igual a c, ou seja, toda função afim f de $\mathbb{N}^*$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(n) = cn + d$, é uma PA de razão c.

Em particular, se $c = 0$, teremos $f(n) = d$ para todo n, que é uma função constante. Nesse caso, essa função determina a PA constante $(d, d, d, d, ...)$ cuja razão é zero.



> ATIVIDADES RESOLVIDAS

2. Verifique se as sequências dadas a seguir são progressões aritméticas (PA) e, em caso afirmativo, determine a razão de cada uma.

a) (3, 7, 11, 15, 19) **b)** $\left(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \ldots\right)$ **c)** $\left(6, \frac{11}{2}, 5, \frac{9}{2}, \ldots\right)$

Resolução

Em uma PA, a diferença entre cada termo, a partir do segundo, e o anterior é constante (razão). Assim, para verificar se uma sequência é uma PA, devemos ter:

$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_{n+1} - a_n = r$

a) $a_2 - a_1 = 7 - 3 = 4$

$a_3 - a_2 = 11 - 7 = 4$

$a_4 - a_3 = 15 - 11 = 4$

$a_5 - a_4 = 19 - 15 = 4$

Portanto, a sequência é uma PA de razão 4.

b) $a_2 - a_1 = \frac{\pi}{2} - \pi = \frac{\pi - 2\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$

$a_3 - a_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - 2\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$

Como $-\frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{4}$, a sequência não é uma PA.

c) $a_2 - a_1 = \frac{11}{2} - 6 = \frac{11-12}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_3 - a_2 = 5 - \frac{11}{2} = \frac{10-11}{2} = -\frac{1}{2}$

$a_4 - a_3 = \frac{9}{2} - 5 = \frac{9-10}{2} = -\frac{1}{2}$

Portanto, a sequência é uma PA de razão $-\frac{1}{2}$.

3. Verifique se a sequência representada pelo termo geral $a_n = 5n - 2$, com $n \in \mathbb{N}^*$, é uma progressão aritmética.

Resolução

Para que a sequência seja uma progressão aritmética, a diferença entre a_{n+1} e a_n deve ser igual a uma constante. Vamos calcular $a_{n+1} - a_n$.

$a_{n+1} - a_n = [5 \cdot (n + 1) - 2] - (5n - 2) = 5n + 5 - 2 - 5n + 2 = 5$

Como a diferença 5 é uma constante, a sequência $a_n = 5n - 2$ é uma progressão aritmética.

4. As medidas dos lados de um triângulo são indicadas, em centímetro, pelas expressões $4x - 1$, $3x + 3$ e $x^2 + 4$ e formam uma PA, nessa ordem. Calcule o perímetro desse triângulo.

Resolução

PA $(4x - 1, 3x + 3, x^2 + 4)$

Para calcular o perímetro, devemos determinar o valor de x e, para isso, podemos aplicar a propriedade do termo central de três termos consecutivos de uma PA. Assim:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \Rightarrow (3x + 3) = \frac{(4x - 1) + (x^2 + 4)}{2} \Rightarrow 6x + 6 = 4x - 1 + x^2 + 4 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0$$

Resolvendo a equação do 2º grau, encontramos $x' = -1$ (não convém, pois os termos da PA representam os lados de um triângulo e precisam ser números positivos) ou $x'' = 3$.

Substituindo $x = 3$ nas expressões que representam as medidas dos lados, temos:

$4x - 1 = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 = 11$

$3x + 3 = 3 \cdot 3 + 3 = 9 + 3 = 12$

$x^2 + 4 = 3^2 + 4 = 9 + 4 = 13$

Assim, o perímetro do triângulo é de 36 cm $(11 + 12 + 13 = 36)$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

5. Uma avenida tem 4 000 m de extensão e vai receber em seu canteiro central o plantio de palmeiras imperiais. A distância entre as mudas deve ser de 15 m, e a primeira planta vai ficar a 10 m do início da avenida. Quantas palmeiras devem ser plantadas?

Resolução

Como a distância entre as palmeiras é sempre a mesma, os números que as localizam vão formar uma PA.

Nessa PA, temos: $a_1 = 10$, $a_n = 4\,000$ e $r = 15$.

Substituindo os valores no termo geral, obtemos:

$a_n = a_1 + (n - 1)r$

$4\,000 = 10 + (n - 1) \cdot 15$

$4\,000 = 10 + 15n - 15$

$15n = 4\,005$

$n = 267$

Assim, serão plantadas 267 palmeiras ao longo da avenida.

6. Calcule o 4º termo da PA em que $a_{10} = 130$ e $a_{19} = 220$.

Resolução

Vamos escrever esses termos em função de a_1 e r:

Se $a_{10} = 130$, então $a_1 + 9r = 130$

Se $a_{19} = 220$, então $a_1 + 18r = 220$

Agora, vamos resolver o sistema de equações:

$$\begin{cases} a_1 + 9r = 130 \cdot (-1) \\ a_1 + 18r = 220 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a_1 - 9r = -130 \\ a_1 + 18r = 220 \end{cases}$$

$$9r = 90$$

$$r = 10$$

Se $r = 10$, temos:

$a_1 + 9 \cdot 10 = 130 \Rightarrow a_1 = 130 - 90 \Rightarrow a_1 = 40$

Determinados $a_1 = 40$ e $r = 10$, agora é possível calcular o 4º termo da PA:

$a_4 = a_1 + 3r \Rightarrow a_4 = 40 + 3 \cdot 10 \Rightarrow a_4 = 70$

Logo, o 4º termo dessa PA é 70.

7. Três números estão em PA, de tal forma que a soma deles é 18 e o produto é 66. Calcule esses números.

Resolução

Vamos indicar a PA (a_1, a_2, a_3) como $(x - r, x, x + r)$.

Podemos formar o sistema com duas variáveis (x e r):

$$\begin{cases} (x - r) + x + (x + r) = 18 \\ (x - r) \cdot x \cdot (x + r) = 66 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 18 \\ x \cdot (x^2 - r^2) = 66 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, temos:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

Substituindo $x = 6$ na 2ª equação, temos:

$x \cdot (x^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 6 \cdot (36 - r^2) = 66 \Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Para $r = 5$, temos:

- 1º termo $= 6 - 5 = 1$
- 2º termo $= 6$
- 3º termo $= 6 + 5 = 11$

Para $r = -5$, temos:

- 1º termo $= 6 - (-5) = 11$
- 2º termo $= 6$
- 3º termo $= 6 + (-5) = 1$

Os números pedidos são 1, 6 e 11.

8. (USCS-SP) Um laboratório que foi credenciado para produzir certa vacina irá produzir 80 000 unidades no primeiro mês e, a cada mês, aumentará essa quantidade em 20 000 unidades. Mantidas essas condições, em um ano e meio de produção ininterrupta esse laboratório terá produzido uma quantidade total de vacinas, em milhões de unidades, igual a

a) 5,0. **b)** 5,5. **c)** 6,0. **d)** 4,5. **e)** 4,0.

Resolução

A quantidade de vacinas produzidas a cada mês pode ser representada pela PA:

$$(80\,000, 100\,000, 120\,000, \ldots).$$

Nessa PA, $a_1 = 80\,000$ e $r = 20\,000$.

A quantidade de vacinas produzidas no 18º mês, ou seja, um ano e meio após o início da produção será de:

$a_{18} = a_1 \cdot 17r \Rightarrow a_{18} = 80\,000 + 17 \cdot 20\,000 \Rightarrow a_{18} = 420\,000$

Em um ano e meio, ou seja, em 18 meses, a quantidade total de vacinas produzidas será igual a:

$$S_{18} = \frac{(80\,000 + 420\,000) \cdot 18}{2} = 500\,000 \cdot 9 = 4\,500\,000$$

Portanto, em um ano e meio o laboratório terá produzido 4 500 000 vacinas, ou seja, 4,5 milhões de vacinas.
Logo, a resposta correta é a alternativa **d**.

> ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

6. Verifique se cada sequência dada a seguir é uma PA. Se sim, determine a razão.

a) (25, 5, 1, 5, ...) não

b) (−17, −17, −17, −17, −17) sim, $r = 0$

c) (36, 30, 24, 18, ...) sim, $r = -6$

d) (10, 13, 16, 20, 24) não

e) (2, 9, 16, 23, 30, ...) sim, $r = 7$

7. Escreva no caderno uma PA:

a) de 5 termos, em que o primeiro termo (a_1) seja 10 e a razão (r) seja 3. (10, 13, 16, 19, 22)

b) de 6 termos, em que $a_1 = -3$ e $r = 5$. (−3, 2, 7, 12, 17, 22)

c) de 4 termos, em que $a_1 = a + 2$ e $r = a$. $(a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)$

8. Determine a razão da PA em cada sequência.

a) (−11, −8, −5, −2, 1) 3

b) (1; 0,875; 0,75; 0,625; 0,5) −0,125

c) $(\sqrt{2}; \sqrt{2} + \sqrt{1}; \sqrt{2} + \sqrt{4}; \sqrt{2} + \sqrt{9}; \ldots)$ 1

9. Verifique se as sequências representadas pelo termo geral indicado em cada caso são progressões aritméticas, com $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $a_n = 3n - 1$ É uma PA de razão 3.

b) $a_n = n^2$ Não é uma PA.

10. Na PA $(a_1, 10, a_3)$ a diferença do terceiro termo para o primeiro termo é 10. Escreva essa PA no caderno. (5, 10, 15)

11. Calcule o termo desconhecido em cada PA.

a) (3, 12, x) $x = 21$

b) (y, 8, 1) $y = 15$

c) (56, x, 70) $x = 63$

d) (4,5; y; 9,5) $y = 7$

12. São dadas duas sequências $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$. Sabe-se que $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$, que $x_n = y_{n+1} - y_n$ e que a primeira sequência é

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

uma progressão aritmética de razão 3. Escreva no caderno:

a) os quatro primeiros termos da sequência (x_n); 1, 4, 7 e 10

b) os quatro primeiros termos da sequência (y_n). 1, 2, 6 e 13

13. Qual é o vigésimo termo da progressão aritmética $(-8, -3, 2, 7, ...)$? 87

14. Em uma PA de razão 5, o primeiro termo é 4. Qual é a posição do termo igual a 44? 9º

15. Determine o termo geral da PA (2, 7, ...). $a_n = 5n - 3$

16. Determine o sexagésimo número natural ímpar. 119

17. Quantos termos tem a PA (5, 10, ..., 785)? 157 termos

18. Em cada item, dados os dois primeiros termos de uma progressão aritmética, calcule o termo especificado.

a) Se $a_1 = 6{,}5$ e $a_2 = 7{,}0$ então $a_{15} =$ ▨. $a_{15} = 13{,}5$

b) Se $a_1 = 3 + \sqrt{5}$ e $a_2 = 4$ então $a_{20} =$ ▨. $a_{20} = 22 - 18\sqrt{5}$

c) Se $a_1 = 1 + \pi$ e $a_2 = -1 + 2\pi$ então $a_{10} =$ ▨. $a_{10} = -17 + 10\pi$

• Elabore um item parecido com os itens anteriores, utilizando números fracionários. Troque o item criado por você com um colega e resolva o item elaborado por ele. Em seguida, verifiquem as resoluções e as estratégias utilizadas por cada um. Resposta possível: Se $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_2 = \frac{8}{9}$, então $a_5 = \frac{23}{9}$.

19. Em um triângulo, as medidas dos ângulos internos estão em PA, e o menor dos ângulos mede 40°. Calcule as medidas dos outros dois ângulos do triângulo. 60° e 80°

20. Em uma progressão aritmética, o oitavo termo é igual a 16 e o décimo termo é igual a 20. Calcule o primeiro termo e a razão dessa progressão. $a_1 = 2; r = 2$

21. Determine a PA em que: $\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 5 \\ 4a_3 - 2a_6 = -8 \end{cases}$ (−1, 2, 5, ...)

22. Em uma PA crescente de seis termos, a soma dos termos de ordem ímpar é 27, e a soma dos termos de ordem par é 36. Escreva essa PA. (3, 6, 9, 12, 15, 18)

23. Determine cinco números em PA crescente, sabendo que o produto $a_1 \cdot a_5$ é igual a 28, e a soma dos outros três termos é 24. (2, 5, 8, 11, 14)

24. Considerando a PA (4, 7, 10, 13, 16, ...), responda.

a) Qual é a lei da função afim associada a essa PA? $f(x) = 3x + 1$

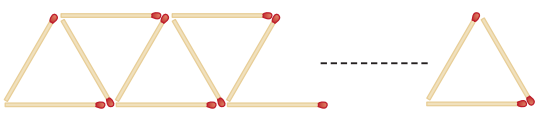
b) Qual é o domínio e a imagem dessa função? $D(f) = \mathbb{N}^*$; $Im(f) = \{4, 7, 10, 13, 16, ...\}$

25. (Unicamp-SP) A Anatel determina que as emissoras de rádio FM utilizem as frequências de 87,9 a 107,9 MHz, e que haja uma diferença de 0,2 MHz entre emissoras com frequências vizinhas. A cada emissora, identificada por sua frequência, é associado um canal, que é um número natural que começa em 200. Desta forma, à emissora cuja frequência é de 87,9 MHz corresponde o canal 200; à seguinte, cuja frequência é de 88,1 MHz, corresponde o canal 201, e assim por diante. Pergunta-se:

a) Quantas emissoras FM podem funcionar (na mesma região), respeitando-se o intervalo de frequências permitido pela Anatel? Qual o número do canal com maior frequência? 101; 300

b) Os canais 200 e 285 são reservados para uso exclusivo das rádios comunitárias. Qual a frequência do canal 285, supondo que todas as frequências possíveis são utilizadas? 104,9 MHz

26. (UFSM-RS)



EDITORIA DE ARTE

Desejando-se formar 100 triângulos com palitos de fósforo dispostos conforme a figura, quantos palitos serão necessários? 201 palitos

TATIANE SILVA/SHUTTERSTOCK.COM

Progressão geométrica

Um mercado resolveu organizar as caixas de um produto no formato de pirâmide com 6 patamares, obedecendo a determinado critério. O primeiro patamar (o mais alto) continha 4 caixas e os demais, o dobro de caixas do patamar anterior. Veja a quantidade de caixas nos patamares formados.

Patamar	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Caixas	4	8	16	32	64	128

■ Os supermercados costumam arranjar os produtos em formatos diferentes para dar destaque e atrair a atenção do consumidor.

Podemos indicar a quantidade de caixas de um patamar de acordo com a ordem de cada um dos patamares. Assim, essa situação pode ser representada pela sequência numérica (4, 8, 16, 32, 64, 128). Note que, nessa sequência, cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior multiplicado por 2:

$8 = 4 \cdot 2$

$16 = 8 \cdot 2$

$32 = 16 \cdot 2$

$64 = 32 \cdot 2$

$128 = 64 \cdot 2$

Essa sequência é um exemplo de **progressão geométrica** (**PG**).

Progressão geométrica é toda sequência de números não nulos em que cada termo, a partir do segundo, é igual ao anterior, multiplicado por uma constante chamada de razão (q) da progressão.

Representando uma PG pela sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, ...)$ e aplicando a definição, temos:

$$\left.\begin{array}{l} a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_2}{a_1} = q \\ a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_3}{a_2} = q \\ \vdots \\ a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = q \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = ... = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

SAIBA QUE...

Observe que a razão $q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ também vale para uma PG genérica finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n)$.

Portanto, em uma PG qualquer, a razão q é igual ao quociente entre cada termo e o respectivo antecessor, a partir do segundo termo.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Considerando o primeiro termo e o valor da razão, podemos classificar uma PG como crescente, decrescente, oscilante ou constante.

Dizemos que uma PG é **crescente** quando:

- o primeiro termo é um número real positivo, e a razão é um número real maior do que 1, isto é, $a_1 > 0$ e $q > 1$. Por exemplo, na PG (1, 7, 49, 343) tem-se $a_1 = 1$ e $q = 7$.
- o primeiro termo é um número real negativo, e a razão é um número real entre zero e 1, isto é, $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$. Por exemplo, na PG $\left(-5, -\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, \ldots\right)$ tem-se $a_1 = -5$ e $q = \frac{1}{2}$.

Dizemos que uma PG é **decrescente** quando:

- o primeiro termo é um número real positivo, e a razão é um número real entre zero e 1, isto é, $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$. Por exemplo, na PG (180, 60, 20, ...) tem-se $a_1 = 180$ e $q = \frac{1}{3}$.
- o primeiro termo é um número real negativo, e a razão é um número real maior do que 1, isto é, $a_1 < 0$ e $q > 1$. Por exemplo, na PG $\left(-\frac{1}{2}, -1, -2, \ldots\right)$ tem-se $a_1 = -\frac{1}{2}$ e $q = 2$.

Classificamos uma PG como **oscilante** quando o primeiro termo é um número real diferente de zero, e a razão é um número negativo, isto é, $a_1 \neq 0$ e $q < 0$. Por exemplo, na PG (−1, 2, −4, 8) tem-se $a_1 = -1$ e $q = -2$.

Uma PG é classificada como **constante** quando sua razão é igual a 1. Por exemplo, na PG (−10, −10, −10, ...) tem-se $a_1 = -10$ e $q = 1$.

Termo geral de uma PG

Seja uma PG infinita qualquer $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$.

Usando a definição de PG, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q = (a_1 \cdot q) \cdot q = a_1 \cdot q^2 \\ a_4 &= a_3 \cdot q = (a_1 \cdot q^2) \cdot q = a_1 \cdot q^3 \\ &\vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q = (a_1 \cdot q^{n-2}) \cdot q = a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Observe que há uma relação entre o índice do termo e o expoente da razão da progressão:

- $a_2 = a_1 \cdot q = a_1 \cdot q^{(2-1)}$
- $a_3 = a_1 \cdot q^2 = a_1 \cdot q^{(3-1)}$
- $a_4 = a_1 \cdot q^3 = a_1 \cdot q^{(4-1)}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

SOLLIA/SHUTTERSTOCK.COM

SAIBA QUE...

Em algumas situações que envolvem termos consecutivos de uma PG, é conveniente recorrer às seguintes representações:

- produto de três termos consecutivos: $\frac{x}{q} \cdot x \cdot xq$
- soma de três termos consecutivos: $x + xq + xq^2$

Uma vez que essa relação também vale para uma PG qualquer finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_{n+1})$, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

em que:

a_n é o termo geral (ou enésimo termo);

a_1 é o primeiro termo;

n é a ordem do termo;

q é a razão.

Essa expressão é conhecida como **fórmula do termo geral de uma PG**.

Por exemplo, vamos determinar a expressão do termo geral da PG (5, 10, 20, ...).

A razão da PG é $q = \frac{10}{5} = 2$.

Substituindo q por 2 e a_1 por 5 na fórmula do termo geral, obtemos a lei de formação dessa PG:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$$

PARA ASSISTIR

Neste vídeo, para impedir que o vírus da gripe aviária se espalhe por um vilarejo e crie uma pandemia, os personagens JR e X7 precisam utilizar seus conhecimentos sobre progressão geométrica.

PARA SALVAR o mundo. Coleção Matemática Multimídia. Vídeo (10min4s). Produzido por: IME. Campinas: Unicamp. Disponível em: https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1151. Acesso em: 29 jun. 2020.

Soma dos termos de uma PG finita

Considere uma PG finita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ de razão q.

Podemos obter a soma S_n de todos os termos dessa PG considerando os seguintes casos:

1º caso: Se $q = 1$, a PG é constante, e como todos os termos são iguais, temos $S_n = a_1 n$.

2º caso: Se $q \neq 1$, a PG não é constante, assim, temos:

$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1}$. (I)

Agora, multiplicamos ambos os membros da equação acima por q. Então:

$qS_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + ... + a_1 q^n$. (II)

Fazendo (II) − (I), temos:

$qS_n - S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + ... + a_1 q^n - (a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + ... + a_1 q^{n-1})$

$qS_n - S_n = a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + ... + a_1 q^n - a_1 - a_1 q - a_1 q^2 - a_1 q^3 - a_1 q^4 - ... - a_1 q^{n-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow qS_n - S_n = -a_1 + a_1 q^n \Rightarrow S_n(q-1) = -a_1 + a_1 q^n \Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Soma dos termos de uma PG infinita

Considere uma sequência (a_n) cujo termo geral é dado por $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ para $n \in \mathbb{N}^*$. Vamos determinar os primeiros termos dessa sequência substituindo valores para n na expressão do termo geral. Assim, temos:

- para $n = 1 \Rightarrow a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2} = 0{,}5$
- para $n = 2 \Rightarrow a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} = 0{,}25$
- para $n = 3 \Rightarrow a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0{,}125$
- para $n = 4 \Rightarrow a_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}0625$
- para $n = 5 \Rightarrow a_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125$

Essa sequência é a PG (0,5; 0,25; 0,125; 0,0625; 0,03125; ...) com $a_1 = \frac{1}{2}$ e razão $q = \frac{1}{2}$. Note que, à medida que aumentamos o valor do expoente n, o valor do termo a_n fica cada vez mais próximo de zero.

Dizemos então que o limite de $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando n tende ao infinito vale zero e representamos assim:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Lê-se: limite de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ quando n tende ao infinito é igual a zero.

De modo geral, é possível demonstrar que, se $q \in \mathbb{R}$, com $|q| < 1$, ou seja, $-1 < q < 1$, então $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$.

Queremos calcular a soma dos infinitos termos de uma PG de razão q, com $-1 < q < 1$. Para isso, vamos analisar o que ocorre com a soma S_n dos n primeiros termos quando n tende ao infinito, ou seja, quando n se torna arbitrariamente grande.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}\right)$$

Mas vimos que $\lim_{n \to \infty} q^n = 0$. Então, podemos escrever:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1(0 - 1)}{q - 1} = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$$

Assim, em uma PG infinita $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...)$ de razão q, com $-1 < q < 1$, temos:

$$\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Portanto, dizemos que a soma dos termos da PG infinita, indicada por S, é:

$$S = \frac{a_1}{1 - q}$$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Progressão geométrica e função exponencial

Veremos a seguir que a progressão geométrica, assim como a progressão aritmética, também se relaciona com um tipo de função. No caso da PG, com a função exponencial.

A função exponencial de base a é definida pela lei $y = a^x$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$.

Considerando o domínio de uma função f os números naturais não nulos, a lei que relaciona qualquer $n \in D(f)$ a $f(n)$ é $f(n) = b^n$ e podemos escrever:

- para $n = 1 \Rightarrow f(1) = b^1 = b = a_1$
- para $n = 2 \Rightarrow f(2) = b^2 = b \cdot b = b \cdot a_1 = a_2$
- para $n = 3 \Rightarrow f(3) = b^3 = b \cdot b^2 = b \cdot a_2 = a_3$
- para $n = 4 \Rightarrow f(4) = b^4 = b \cdot b^3 = b \cdot a_3 = a_4$
- para $n = 5 \Rightarrow f(5) = b^5 = b \cdot b^4 = b \cdot a_4 = a_5$

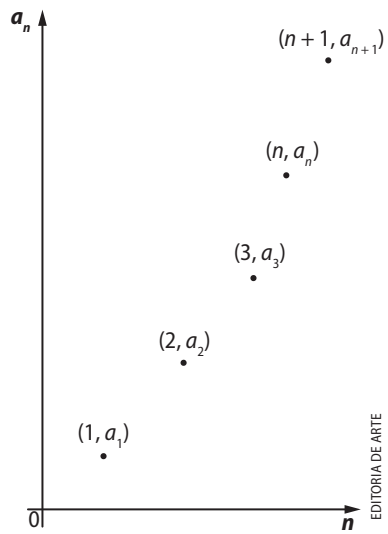
⋮ ⋮ ⋮

Assim, temos:

$f(n) = b^n$

$f(n + 1) = b^{n+1}$, ou seja, $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ... formam uma PG de razão b.

Veja como fica o gráfico de f quando $b > 0$ e $b > 1$.



Calculando o quociente entre $f(n + 1)$ e $f(n)$, temos:

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{b^{n+1}}{b^n} = b^{n+1-n} = b$$

Então, considerando a sequência $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n, a_{n+1}, ...)$, o quociente entre cada termo e o anterior é constante e igual a b, ou seja, toda função exponencial $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = b^n$, com $b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$, é uma PG de razão $q = b$.

Observe que se pode definir uma PG de razão negativa; porém, neste caso, não associamos essa PG a uma função exponencial, que só está definida para bases positivas.

SAIBA QUE...

Para indicar a base da função f, usamos a letra b ao invés da usual a para não confundir com os termos da PG: $a_1, a_2, a_3...$

PENSE E RESPONDA

- Podemos dizer que os pontos $(1, a_1)$, $(2, a_2)$, $(3, a_3)$, ..., (n, a_n), $(n + 1, a_{n+1})$, ... estão alinhados? Justifique sua resposta.
- No gráfico que representa uma PG, podemos traçar uma curva contínua ligando os pontos?

Ver as **Orientações para o professor**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS

9. Considere que a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$, com $x \neq 0$, é uma PG de razão não nula.

a) Calcule o valor de x.

b) Escreva essa progressão.

Resolução

a) Como a sequência $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma progressão geométrica de razão não nula e $x \neq 0$, $3x + 2$ e $10x + 12$ são não nulos e podemos escrever:

$$\frac{3x+2}{x} = \frac{10x+12}{3x+2} \Rightarrow x(10x + 12) = (3x + 2)(3x + 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10x^2 + 12x = 9x^2 + 12x + 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Portanto, os valores de x são -2 ou 2.

b) Se $x = 2$, temos $a_1 = 2$, então:

$a_2 = 3x + 2 = 3 \cdot 2 + 2 = 8$

$a_3 = 10x + 12 = 10 \cdot 2 + 12 = 32$

Assim, a PG é $(2, 8, 32)$. Note que, nesse caso, $q = 4$.

Se $x = -2$, temos $a_1 = -2$, então:

$a_2 = 3x + 2 = 3 \cdot (-2) + 2 = -4$

$a_3 = 10x + 12 = 10 \cdot (-2) + 12 = -8$

Assim, a PG é $(-2, -4, -8)$. Note que, nesse caso, $q = 2$.

10. Sejam quatro números inteiros tais que os três primeiros formam uma progressão aritmética de razão 3; os três últimos, uma progressão geométrica; e o primeiro número é igual ao quarto. Determine esses quatro números.

Resolução

Representando três números em PA de razão 3 e observando os dados do problema, escrevemos a sequência:

$(x - 3, x, x + 3, x - 3)$, com termos não nulos.

Como os três últimos números formam uma PG e os termos são não nulos, temos:

$$\frac{x+3}{x} = \frac{x-3}{x+3} \Rightarrow (x + 3)^2 = x(x - 3) \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 3x \Rightarrow 9x = -9 \Rightarrow x = -1$$

Substituindo x por -1 na sequência, obtemos:

$(-4, -1, 2, -4)$

Portanto, os números são: -4, -1, 2 e -4.

11. Determine o 10º termo da PG (2, 6, ...).

Resolução

A razão dessa progressão geométrica é igual a:

$$q = \frac{6}{2} = 3$$

Se $a_1 = 2$, o décimo termo ($n = 10$) é:

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^{10-1} \Rightarrow a_{10} = 2 \cdot 3^9 = 39\,366$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

12. Dada a progressão geométrica (1, 3, 9, 27, ...), calcule:

a) a soma dos 6 primeiros termos;

b) quantos termos devem ser somados para que o resultado da adição seja 29 524.

Resolução

a) $a_1 = 1; q = 3; n = 6$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{1 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{729 - 1}{2} = 364$$

b) $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 29\,524 = \frac{1 \cdot (3^n - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 3^n = 59\,049 \Rightarrow 3^n = 3^{10} \Rightarrow n = 10$

Devemos somar 10 termos para obter 29 524.

13. Calcule o valor de x na igualdade $x + 3x + 9x + ... + 729x = 5\,465$, sabendo que os termos do 1º membro formam uma PG e que x não é nulo.

Resolução

$a_1 = x; q = \frac{3x}{x} = 3; a_n = 729x; S_n = 5\,465$

Cálculo de n:

$a_n = a_1 q^{n-1} \Rightarrow 729x = x \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 729 = 3^{n-1} \Rightarrow 3^6 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$

$$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 5\,465 = \frac{x(3^7 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow 5\,465 = \frac{x(2187 - 1)}{2} \Rightarrow 5\,465 = 1093x \Rightarrow x = 5$$

14. Determine a soma dos infinitos termos da PG dada por $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{27} ...\right)$

Resolução

Neste problema, vamos determinar a soma da PG infinita dada, em que $a_1 = \frac{1}{3}$ e $q = \frac{2}{3}$.

$$S = \frac{a_1}{1 - q} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}} \Rightarrow S = 1$$

Portanto, a soma da PG infinita dada é 1.

15. Dada a progressão geométrica (20, 10, 5, ...), faça o que se pede.

a) Determine o termo geral dessa PG.

b) Associe essa PG a uma função exponencial com domínio $\mathbb{N}^*$.

Resolução

a) O termo geral de uma PG é dado por $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Assim, como $a_1 = 10$ e $q = \frac{10}{20} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$; então, o termo geral da PG (20, 10, 5, ...) é: $a_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Simplificando a expressão do termo geral, encontramos:

$$a_n = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \left(\frac{2}{1}\right) = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Logo, podemos associar a PG (20, 10, 5, ...) à função exponencial $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ definida por:

$f(n) = 40 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

27. Determine a razão de cada uma das seguintes progressões geométricas:

a) (3, 12, 48) 4

b) (10, 5, ...) $\frac{1}{2}$

c) (5, −15, ...) −3

d) (10, 50, 250) 5

e) $(\sqrt{5}, 5, ...)$ $\sqrt{5}$

f) $(2, 2^5, 2^9)$ 2^4

g) $\left(5, \frac{5}{2}, ...\right)$ $\frac{1}{2}$

h) $(10^{-1}, 10, 10^3)$ 10^2

28. Classifique as progressões geométricas dadas a seguir em crescentes, decrescentes, oscilantes ou constantes.

a) (5, 5, 5, ...) constante

b) $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$ decrescente

c) (−2, −8, −32, ...) decrescente

d) (3, −6, 12, −24) oscilante

e) (4, 6, 9, ...) crescente

f) $\left(-7, -\frac{7}{4}, -\frac{7}{16}, -\frac{7}{64}\right)$ crescente

g) $(\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, ...)$ crescente

h) $\left(\sqrt{3}, 1, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ decrescente

29. Verifique se a sequência $a_n = 5 \cdot 4^{n-2}$, com $n \in \mathbb{N}^*$ é uma progressão geométrica.
Ver as **Orientações para o professor**.

30. (UFSC) Se a, b, c são termos consecutivos de uma PA de razão 5 e $(a + 2)$, b, $(c - 1)$ são termos consecutivos de uma PG, qual o valor de $a + b + c$? 36

31. (UFMG) Os números reais 3, a e b são, nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão aritmética cuja razão é positiva. Por sua vez, os números reais a, b e 8 são, também nessa ordem, termos consecutivos de uma progressão geométrica. Determine a e b. $a = \frac{9}{2}$ e $b = 6$

32. Calcule o décimo termo da PG (1, 5, ...). 5^9

33. Qual é o sexto termo da PG (512, 256, ...)? 16

34. Uma PG tem seis termos, sendo 2 o último termo e $\frac{1}{4}$ a razão. Qual é o primeiro termo dessa PG? 2 048

35. Em uma PG, $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_7 = 16$. Calcule a razão dessa PG. $q = \pm 2$

36. Em uma PG, $a_5 = 32$ e $a_8 = 256$. Calcule q e a_1. $q = 2$ e $a_1 = 2$

37. Qual é o sétimo termo da PG $\left(\frac{1}{2}, -1, 2, ...\right)$? 32

38. Qual é o 20º termo da PG $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \sqrt{2}, ...\right)$? 512

39. Em uma progressão geométrica, a diferença entre o segundo e o primeiro termos é 9, e a diferença entre o quinto e o quarto termos é 576. Calcule o primeiro termo dessa progressão. 3

40. Entre os números 18 e b foram inseridos dois termos, obtendo-se uma PG de razão 3. Qual é o valor de b? 486

41. (Vunesp-SP) Suponhamos que uma represa de área igual a 128 km² tenha sido infestada por uma vegetação aquática. Suponhamos também que, por ocasião de um estudo sobre o problema, a área tomada pela vegetação fosse de 8 km² e que esse estudo tivesse concluído que a taxa de aumento da área cumulativamente infestada era de 50% ao ano. Nessas condições:

a) Qual seria a área infestada n anos depois do estudo, caso não se tomasse nenhuma providência? $A_n = 8 \cdot (1{,}5)^n$

b) Com as mesmas hipóteses, em quantos anos a vegetação tomaria conta de toda a represa? (Use os valores aproximados $\log_{10} 2 = 0{,}30$ e $\log_{10} 3 = 0{,}48$) 7 anos

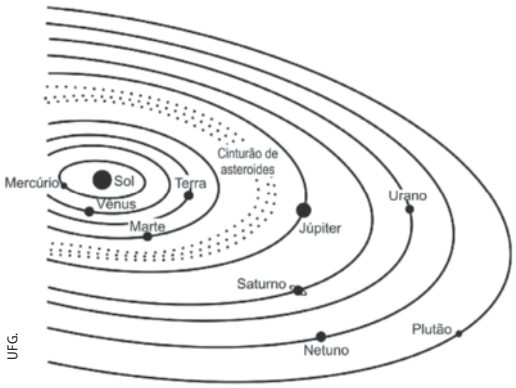
42. (Ufop-MG) Numa progressão geométrica, $a_1 = 1$ e $a_2 = 9$. Determine n, sabendo que $a_n = 6\,561$. $n = 5$

43. Usando uma calculadora, determine a soma dos termos da PG (5, 50, ..., 500 000). $S_6 = 555\,555$

44. Quantos termos devemos considerar na PG (3, 6, ...) para obter 765 como soma de termos? 8 termos

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

45. (UFG-GO) A figura a seguir é uma representação do Sistema Solar.



Em 1766, o astrônomo alemão J. D. Tietz observou que as distâncias heliocêntricas dos planetas até então conhecidos e do cinturão de asteroides obedeciam, com boa aproximação, a um padrão conhecido hoje como lei de Titius-Bode.

Segundo esse padrão, a partir do planeta Vênus e incluindo o cinturão de asteroides, subtraindo-se 0,4 das distâncias heliocêntricas, em unidades astronômicas (UA), obtém-se uma progressão geométrica com termo inicial 0,3 e razão 2. A distância da Terra ao Sol, por exemplo, é de, aproximadamente, 1 UA e, neste caso, $1 - 0{,}4 = 0{,}3 \times 2$.

Determine, segundo a lei de Titius-Bode, a distância heliocêntrica, em UA, do planeta Júpiter. 5,2 UA

46. (Vunesp-SP) Várias tábuas iguais estão em uma madeireira. A espessura de cada tábua é 0,5 cm. Forma-se uma pilha de tábuas colocando-se uma tábua na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houveram sido colocadas anteriormente.

Determine, ao final de 9 dessas operações:

a) quantas tábuas terá a pilha; 256

b) a altura, em metro, da pilha. 1,28 m

47. O vazamento de um tanque de água provocou a perda de 2 litros de água no primeiro dia. Como o orifício responsável pela perda ia aumentando, no dia seguinte o vazamento foi o dobro do dia anterior. Se essa perda for dobrando a cada dia, qual o número total de litros de água perdidos até o 12º dia?
8 190 litros

48. (Fuvest-SP) Resolva os três itens a seguir.

a) O primeiro termo de uma progressão geométrica de razão positiva é 5, e o terceiro termo é 45. Calcule a soma dos 6 primeiros termos dessa progressão. 1 820

b) Calcule a soma dos números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4.
4 704

c) A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é $n(2n + 1)$, qualquer que seja $n \geqslant 1$. Encontre o vigésimo termo dessa progressão. 79

49. Euclides, no livro X de **Os elementos**, ensina como somar os termos de uma progressão geométrica. Ver as **Orientações para o professor**.

A fórmula é: $S_n = a_1 \cdot \dfrac{a_{n+1} - a_1}{a_2 - a_1}$. Mostre que essa fórmula é equivalente à $S_n = \dfrac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.

50. Em cada uma das progressões a seguir: determine o termo geral da PG, associe a PG a uma função exponencial com domínio $\mathbb{N}^*$ e calcule a soma dos termos da PG.
Ver as **Orientações para o professor**.

a) $\left(5, 1, \dfrac{1}{5}, \ldots\right)$

b) $(2^{-2}, 2^{-4}, 2^{-6}, \ldots)$

c) $(9^{-1}, 10^{-1}, 9 \cdot 10^{-2}, 9^2 \cdot 10^{-3}, \ldots)$

51. Em 2020, uma empresa de peças de automóveis estava expandindo os negócios e fez uma projeção de aumento de 10% nas vendas em 2021. De acordo com a projeção feita, as vendas continuariam aumentando na mesma proporção pelos próximos 10 anos.

a) Supondo que a projeção esteja correta, quanto a empresa venderia em 2023, sabendo que a produção em 2020 foi de 1 000 peças?
1 331 peças

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

b) Escreva a sequência que representa de maneira aproximada a projeção de venda de peças para essa empresa pelos próximos 10 anos, após 2020. (1 100, 1 210, 1 331, ..., 2 594)

c) Qual é a função que representa a projeção feita pela empresa?

Ver as **Orientações para o professor.**

d) Represente graficamente os pontos do gráfico dessa função.

Ver as **Orientações para o professor.**

52. Represente graficamente os 5 primeiros termos das progressões geométricas a seguir, definidas em $\mathbb{N}^*$.

Ver as **Orientações para o professor.**

a) $a_n = 2^n$ **b)** $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$

53. Em cada equação, o primeiro membro representa a soma dos termos de uma PG infinita. Determine os valores possíveis para x.

a) $80x + 40x + 20x + ... = 320$ $S = \{2\}$

b) $5^x + 5^{x-1} + 5^{x-2} + ... = \frac{625}{4}$ $S = \{3\}$

54. (FGV-SP) É dada a progressão geométrica infinita (45, 15, 5, ...).

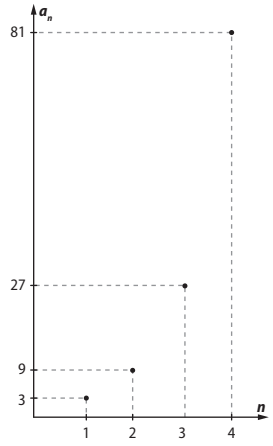
a) Ache a soma de seus termos. 67,5

b) Obtenha o menor valor de n, de modo que o enésimo termo a_n seja menor que $\frac{1}{30}$. (Adote os valores $\log 2 = 0{,}30$ e $\log 3 = 0{,}48$.) $n = 8$

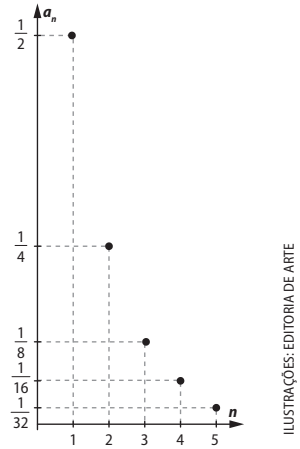
55. (UFJF-MG) Uma bola de borracha cai de uma altura de 30 metros. Após o choque com o solo, a bola sobe a uma altura igual a $\frac{1}{3}$ da altura anterior. Se deixarmos a bola subir e descer sem interrupção, qual será a distância total percorrida por ela? 60 metros

56. Considere os gráficos das progressões geométricas finitas representadas a seguir, com $n \in \mathbb{N}^*$.

I



II

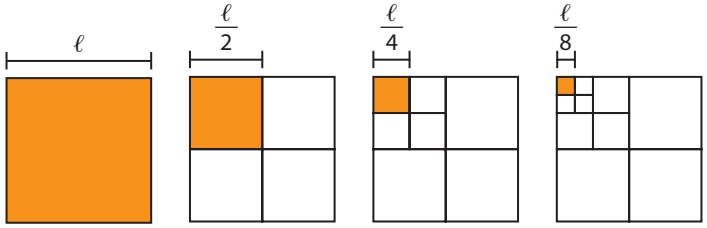


ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

a) Escreva os termos de cada uma dessas progressões. I: 3, 9, 27 e 81; II: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{32}$

b) Determine o termo geral das progressões cujos gráficos estão representados. I: $a_n = 3^n$; II: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

57. (UFPel-RS) O lado de um quadrado mede ℓ unidades de comprimento. Unindo-se os pontos médios dos lados opostos, obtêm-se quatro novos quadrados. Se procedermos assim, sucessivamente, obteremos novos quadrados cada vez menores, conforme a figura, que mostra parte de uma sequência infinita. Determine a soma dos perímetros de todos os quadrados coloridos dessa sequência. $S = 8\ell$



VALEX/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Algoritmos e fluxogramas

Algoritmos são sequências de instruções que, ao serem aplicadas, possibilitam a realização de uma tarefa. Um programa de TV de culinária, por exemplo, apresenta o passo a passo para a reprodução de uma receita. Esse programa está apresentando um algoritmo de preparação de um prato.

Direções para um caminho, a explicação da solução de um problema e vídeos de tutoriais são outros exemplos de algoritmos que fazem parte do nosso dia a dia.

Os algoritmos são indispensáveis na programação e no funcionamento de computadores e de empresas em geral, pois, para que determinada tarefa seja executada, é necessário fornecer uma sequência de instruções.

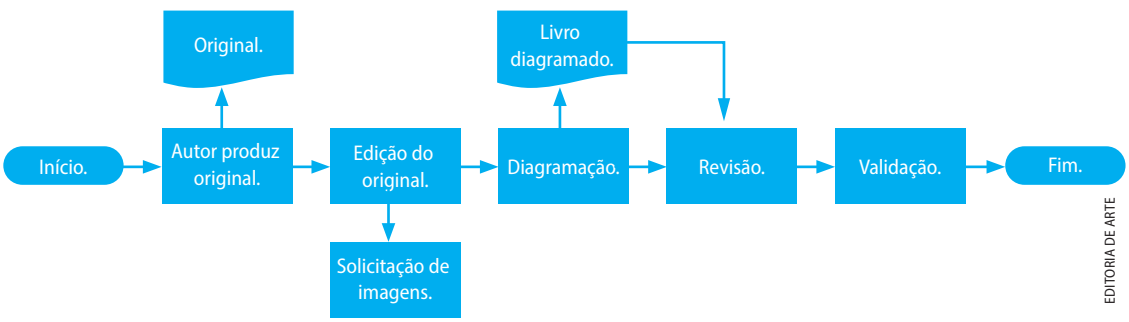
Um modo intuitivo de descrever um algoritmo é fazê-lo de forma textual. Por exemplo, veja a descrição do início da produção deste livro que você está lendo:

"O autor escreve o texto original do livro em um arquivo, que é enviado ao departamento responsável pela edição do texto e do conteúdo. Na sequência, esse arquivo é enviado ao departamento que diagrama o livro, ao mesmo tempo em que são solicitadas as ilustrações e as fotos.

O departamento responsável pela diagramação, de posse das ilustrações e das fotos, as aplica, gera um novo arquivo e o envia ao departamento que fará a revisão gramatical. O arquivo revisado retorna ao departamento responsável pela edição."

Com esses dois parágrafos (que explicam uma pequena parte do processo de produção deste livro), já deve ser possível notar que esse método não é o melhor para descrever um processo longo, visto que envolveria uma descrição extensa e isso tornaria difícil identificar as etapas e os agentes do processo.

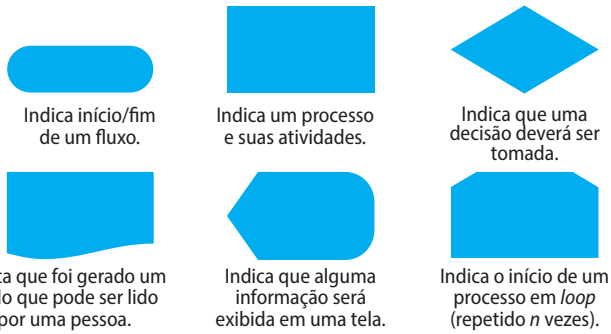
Para isso, existem os **fluxogramas**, que descrevem um processo/algoritmo de forma sucinta e visual. Veja como descrever esse mesmo processo por esse método.



EDITORIA DE ARTE

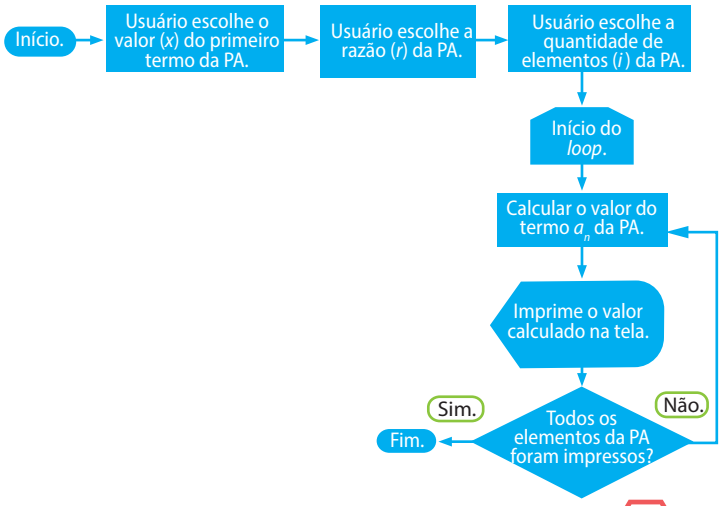
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Vamos conhecer alguns símbolos utilizados na elaboração de um fluxograma.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

Com um fluxograma, podemos, por exemplo, descrever como um programa de computador deve agir para mostrar na tela os termos de uma PA finita qualquer, dados o primeiro termo, a razão (r) e a quantidade de elementos da PA. Observe.



Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir.

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Execute o fluxograma apresentado anteriormente para valores de x, r e i escolhidos por você. Resposta pessoal.

2. Escolha algum conteúdo estudado neste Capítulo e faça um fluxograma para algo relacionado a ele. Resposta pessoal.

3. Elabore um fluxograma explicando como fazer algo que você saiba fazer muito bem, compartilhe-o com um colega e peça que analise se, com esse fluxograma, ele seria capaz de executar o processo descrito. Se ele não conseguir, verifiquem o que é necessário mudar no seu fluxograma. Resposta pessoal.

EVERYTHING POSSIBLE/SHUTTERSTOCK.COM

Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo

Alguns estudos demográficos utilizam modelos matemáticos envolvendo progressões aritméticas e geométricas. Leia o texto a seguir a respeito da teoria malthusiana, um desses estudos demográficos.

Teoria Malthusiana

[...]

Exposta em 1798, foi a primeira teoria demográfica de grande repercussão nos meios acadêmicos, políticos e econômicos e até hoje é a mais popular de todas, apesar das falhas que apresenta. Preocupado com os problemas socioeconômicos (desemprego, fome, êxodo rural, rápido aumento populacional) decorrentes da Revolução Industrial e que afetavam seriamente a Inglaterra, Malthus expôs sua famosa teoria a respeito do crescimento demográfico.

Afirmava que as populações humanas, se não ocorrerem guerras, epidemias, desastres naturais etc., tenderia a duplicar a cada 25 anos. Ela cresceria, portanto, em *progressão geométrica* (2, 4, 8, 16, 32...). Já o crescimento da produção de alimentos ocorreria apenas em progressão aritmética (2, 4, 6, 8, 10...).

Ao considerar esses dois postulados, Malthus concluiu que o ritmo de crescimento populacional (progressão geométrica) seria mais acelerado que o ritmo de crescimento da produção de alimentos (progressão aritmética). [...]

Para ele e os defensores dessa tese, descartavam a utilização de métodos contraceptivos para limitar o crescimento populacional; para eles a solução estaria no *controle da natalidade*, sendo que o referido controle deveria basear-se na sujeição moral do homem (casamento tardio, abstinência sexual etc.).

[...]

Hoje, sabe-se que as previsões malthusianas não se concretizaram: a população do planeta não duplicou a cada 25 anos e a produção de alimentos tem crescido com o desenvolvimento tecnológico. [...]

[...]

[...] Malthus subestimou a capacidade da tecnologia em elevar a produção de alimentos. Mas, desde que ele apresentou sua teoria, ainda nos dias atuais, são comuns os discursos que relacionam de forma simplista a ocorrência da fome no planeta ao crescimento populacional.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Teoria Neomalthusiana

[...] Mas como explicar, e, a partir daí, enfrentar os problemas da fome e miséria nos países subdesenvolvidos?

Nesse contexto histórico, foi criada a teoria demográfica neomalthusiana, uma tentativa de explicar a ocorrência de fome nos países subdesenvolvidos, para se esquivarem das questões econômicas.

[...]

Os neomalthusianos, temerosos, diante desse quadro assustador no Terceiro Mundo, passam a responsabilizar esses países pelo quadro de fome e miséria e os seus elevados crescimentos demográficos.

Para os neomalthusianos quanto maior o número de habitantes de um país, menor a renda *per capita* e a disponibilidade de capital a ser distribuído pelos agentes econômicos. Verifica-se que essa teoria, embora com postulados totalmente diferentes daqueles utilizados por Malthus, chega à mesma conclusão: o crescimento populacional é o responsável pela ocorrência da miséria. Ela passa, então, a propor programas de controle da natalidade nos países subdesenvolvidos e a disseminação da utilização de métodos anticoncepcionais. [...]

[...]

Apesar de vários países terem adotado medidas de controle da natalidade sob orientações neomalthusianas, a situação de fome e miséria continuou existindo.

[...]

SILVA, J. A. B. *et al.* Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo. **Caderno de Graduação**: Ciências Humanas e Sociais Unit, Aracaju, v. 2, n. 3, p. 113-124, mar. 2015. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernohumanas/article/view/1951. Acesso em: 29 jun. 2020.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Represente o que expunha Malthus em sua teoria demográfica, por meio de um gráfico, esboçando o crescimento da população e o crescimento da produção de alimentos. Qual ponto do gráfico corresponde ao colapso na oferta de alimentos no mundo?
Ver as **Orientações para o professor**.
2. Em 1798, ano da divulgação da teoria malthusiana, a população mundial era de aproximadamente 1 bilhão de habitantes. Se as hipóteses apontadas por Malthus tivessem se concretizado, qual teria sido a população mundial no ano 2000?
3. Pesquise a teoria reformista, que é outra teoria de crescimento demográfico. Quais são as ideias básicas dessa teoria? Qual é a relação entre ela e as teorias citadas anteriormente?

MELITAS/SHUTTERSTOCK.COM; INK DROP/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

O texto a seguir conta a história de quando o matemático, astrônomo e físico alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855), ainda estudante, supostamente teria calculado mentalmente a soma dos 100 primeiros números naturais não nulos. Leia o texto e tente associar a fórmula da soma dos *n* primeiros termos de uma PA, apresentada neste Capítulo, com a fórmula possivelmente utilizada por Gauss no cálculo mental.

ZABANSKI/SHUTTERSTOCK.COM

Gauss e a soma de uma progressão aritmética

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) [...] foi menino prodígio. [...]

Gauss em criança se divertia com cálculos matemáticos; uma anedota referente a seus começos na escola é característica. Um dia, para ocupar a classe, o professor mandou que os alunos somassem todos os números de um a cem, com instruções para que cada um colocasse sua ardósia sobre a mesa logo que completasse a tarefa. Quase imediatamente, Gauss colocou sua ardósia sobre a mesa dizendo: "Aí está!". O professor olhou-o com desdém enquanto os outros trabalhavam diligentemente. Quando o instrutor finalmente olhou os resultados, a ardósia de Gauss era a única com a resposta correta, 5 050, sem outro cálculo. O menino de dez anos evidentemente calculara mentalmente a soma da progressão aritmética $1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100$, presumivelmente pela fórmula $\frac{m \cdot (m+1)}{2}$. Seus mestres logo levaram o talento de Gauss à atenção do Duque de Brunswick, que apoiou seus estudos, primeiro para que pudesse cursar o colégio local, depois na Universidade em Göttingen, onde se matriculou em outubro de 1795.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 1. ed. 9. reimp. São Paulo: Edgard Blücher, 1996. p. 343-344. Título original: A history of mathematics.

ROOK76/SHUTTERSTOCK.COM

ESCOLA DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA UNIVERSIDADE DE ST. ANDREWS, ESCÓCIA/REPRODUÇÃO

- Selos comemorativos, em homenagem a Gauss. Respectivamente: Alemanha (1955), Alemanha Oriental (1977) e Nicarágua (1994).

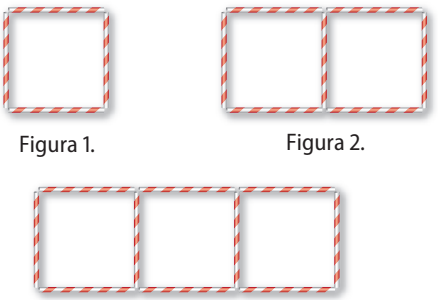
SHMER/SHUTTERSTOCK.COM

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES COMPLEMENTARES

NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. (Enem/MEC) Uma professora realizou uma atividade com seus alunos utilizando canudos de refrigerante para montar figuras, onde cada lado foi representado por um canudo. A quantidade de canudos (C) de cada figura depende da quantidade de quadrados (Q) que formam cada figura. A estrutura de formação das figuras está representada a seguir.



ILUSTRAÇÕES: EDITORIA DE ARTE

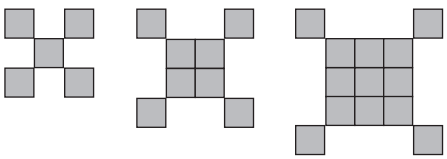
Figura 1. Figura 2.

Figura 3.

Que expressão fornece a quantidade de canudos em função da quantidade de quadrados de cada figura? alternativa **b**

a) $C = 4Q$
b) $C = 3Q + 1$
c) $C = 4Q - 1$
d) $C = Q + 3$
e) $C = 4Q - 2$

2. (UFRGS-RS) Considere o padrão de construção, representado pelos desenhos formados por quadrados de lado 1, em cada uma das etapas indicadas na figura abaixo.



Etapa 1 Etapa 2 Etapa 3

O número de quadrados de lado 1 que farão parte da figura da etapa 10 é alternativa **c**

a) 96.
b) 100.
c) 104.
d) 108.
e) 112.

3. (PUC-RJ) Os números $a_1 = 5x - 5$, $a_2 = x + 14$ e $a_3 = 6x - 3$ estão em PA.
A soma dos 3 números é igual a: alternativa **b**

a) 48
b) 54
c) 72
d) 125
e) 130

4. (PUC-SP) Uma pessoa montou um quebra-cabeça de 1000 peças em 11 dias. No 1º dia foram montadas 40 peças, e o número diário de peças montadas do 2º ao 11º dia obedeceram a uma progressão aritmética. Se o número de peças montadas no 2º dia correspondeu a 60% do número de peças montadas no 7º dia, então, o número de peças montadas no 9º dia foi: alternativa **c**

a) 120.
b) 118.
c) 116.
d) 114.

5. (Enem/MEC) Sob a orientação de um mestre de obras, João e Pedro trabalharam na reforma de um edifício. João efetuou reparos na parte hidráulica nos andares 1, 3, 5, 7, e assim sucessivamente, de dois em dois andares. Pedro trabalhou na parte elétrica nos andares 1, 4, 7, 10, e assim sucessivamente, de três em três andares. Coincidentemente, terminaram seus trabalhos no último andar. Na conclusão da reforma, o mestre de obras informou, em seu relatório, o número de andares do edifício. Sabe-se que, ao longo da execução da obra, em exatamente 20 andares, foram realizados reparos nas partes hidráulica e elétrica por João e Pedro.
Qual é o número de andares desse edifício?

a) 40
b) 60
c) 100
d) 115 alternativa **d**
e) 120

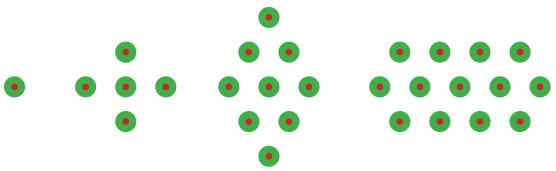
6. (UEA-AM) Em um programa de reabilitação pós-cirurgia, um paciente fez caminhadas diárias durante 10 dias seguidos. Sabe-se que a cada dia ele caminhava 160 metros a mais que no dia imediatamente anterior, e que no primeiro dia ele percorreu $\frac{1}{7}$ da distância percorrida no décimo dia. Desse modo, no sétimo dia esse paciente percorreu alternativa **a**

a) 1,2 km.
b) 1,12 km.
c) 0,92 km.
d) 2,0 km.
e) 1,04 km.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

7. (Vunesp-SP) Num laboratório, foi feito um estudo sobre a evolução de uma população de vírus. Ao final de um minuto do início das observações, existia 1 elemento na população; ao final de dois minutos, existiam 5, e assim por diante. A seguinte sequência de figuras apresenta as populações do vírus (representado por um círculo) ao final de cada um dos quatro primeiros minutos.

EDITORIA DE ARTE



Supondo que se manteve constante o ritmo de desenvolvimento da população, o número de vírus no final de 1 hora era de: alternativa **c**

a) 241 **c)** 237 **e)** 232
b) 238 **d)** 233

8. (UFSM-RS) No trecho de maior movimento de uma rodovia, ou seja, entre o km 35 e o km 41, foram colocados *outdoors* educativos de 300 em 300 metros. Como o 1º foi colocado exatamente a 50 metros após o km 35, a distância entre o 13º *outdoor* e o km 41 é, em metros:

a) 3700 **c)** 2750 **e)** 2150
b) 3650 **d)** 2350 alternativa **d**

9. (Enem/MEC) A prefeitura de um pequeno município do interior decide colocar postes para a iluminação ao longo de uma estrada retilínea, que inicia em uma praça central e termina numa fazenda na zona rural. Como a praça já possui iluminação, o primeiro poste será colocado a 80 metros da praça, o segundo, a 100 metros, o terceiro, a 120 metros, e assim sucessivamente, mantendo-se sempre uma distância de vinte metros entre os postes, até que o último poste seja colocado a uma distância de 1380 metros da praça.
Se a prefeitura pode pagar, no máximo, R$ 8 000,00 por poste colocado, o maior valor que poderá gastar com a colocação desses postes é alternativa **c**

a) R$ 512 000,00. **d)** R$ 552 000,00
b) R$ 520 000,00 **e)** R$ 584 000,00
c) R$ 528 000,00

10. (UEA-AM) Daniel emprestou R$ 21250,00 a seu amigo Leonardo. O pagamento do valor total emprestado, sem o acréscimo de juros, será feito em uma sequência de 10 parcelas mensais, na qual os valores das parcelas constituem uma progressão aritmética crescente de razão *r*. Se o valor da primeira parcela é R$ 1000,00, a soma dos valores da oitava, nona e décima parcelas é igual a alternativa **e**

a) R$ 8250,00. **d)** R$ 7800,00.
b) R$ 8750,00. **e)** R$ 9000,00.
c) R$ 8600,00.

11. (UEG-GO) Uma concessionária vende um carro financiado em dois anos, e as parcelas mensais serão da seguinte maneira: a primeira parcela será de R$ 1000,00, e as demais decrescerão R$ 20,00 ao mês. Ao final do financiamento, esse carro terá custado ao comprador

a) R$ 18480,00 alternativa **a** **d)** R$ 17760,00
b) R$ 18240,00 **e)** R$ 17520,00
c) R$ 18000,00

12. (Uneb-BA) De um livro com 20 páginas, todas numeradas, retira-se uma folha. Sabendo-se que a soma dos números das páginas restantes do livro é 171, pode-se afirmar corretamente que a folha retirada foi a alternativa **04**

01) décima nona.
02) décima quarta.
03) décima segunda.
04) décima.
05) nona.

13. (UFRGS-RS) Em uma escola, as turmas de ensino médio totalizam 231 estudantes. Para uma atividade festiva na escola, todos esses estudantes foram dispostos em filas, obedecendo à seguinte disposição: 1 estudante na primeira fila, 2 estudantes na segunda fila, 3 estudantes na terceira fila, e assim sucessivamente.
O número de filas que foram formadas com todos os estudantes é alternativa **b**

a) 19. **d)** 23.
b) 21. **e)** 25.
c) 22.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

14. (UFRGS-RS) Desde a Grécia Antiga, sabe-se que a soma dos números ímpares consecutivos, a partir do 1, é sempre um quadrado perfeito. Como exemplo, tem-se

$1 = 1^2$

$1 + 3 = 2^2$

$1 + 3 + 5 = 3^2$

$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$

Então, a soma de todos os números ímpares menores do que 100 é alternativa **c**

a) 42^2.
b) 49^2.
c) 50^2.
d) 99^2.
e) 100^2.

15. (FGV-SP) Pensando em sua futura poupança, Roberto decidiu, no final de janeiro de 2018, investir no mercado de ações, adquirindo 100 ações da empresa VP. Seu plano foi, em cada um dos finais dos próximos 59 meses, comprar duas ações da mesma empresa a mais do que comprou no mês anterior.
Logo após sua última compra, a ser feita no final de dezembro de 2022, seu investimento resultará em um total de N ações.
Supondo que no período considerado não haja proventos que resultem em aumento no número de ações, pode-se afirmar que N é igual a: alternativa **d**

a) 9 440
b) 9 640
c) 9 240
d) 9 540
e) 9 340

16. (PUC-SP) Se a razão de uma PG é maior que 1 e o primeiro termo é negativo, a PG é chamada: alternativa **a**

a) decrescente.
b) crescente.
c) constante.
d) alternante.
e) singular.

17. (UERN) Um fabricante de televisores produziu 204 700 unidades em um período de 11 meses. Considerando-se que, no primeiro mês, a produção foi de x unidades e que, nos demais meses, foi o dobro do mês anterior, pode-se afirmar que o valor de x é: alternativa **a**

a) 100
b) 90
c) 80
d) 50

18. (UFPA) A razão da PG cujos termos satisfazem as relações $a_1 + a_3 + a_5 = 5$ e $a_2 + a_4 + a_6 = 10$ é:

a) $\frac{1}{2}$
b) 1
c) $\frac{3}{2}$
d) 2
e) 3

alternativa **d**

19. (Unifor-CE) O número de termos da progressão $\left(\frac{1}{125}, \frac{1}{25}, \frac{1}{5}, ..., 3\,125\right)$ é alternativa **e**

a) 5 **b)** 6 **c)** 7 **d)** 8 **e)** 9

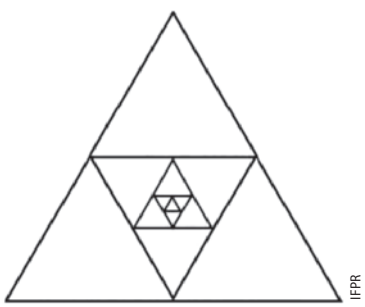
20. (UEG-GO) Dada a sequência $(-7, 21, -63, ...)$, que forma uma progressão geométrica, o sexto termo dessa progressão é alternativa **b**

a) −1701
b) 1701
c) 2 187
d) −5 103
e) 5 103

21. (Unilasalle-RS) O novo *site* de uma empresa foi inaugurado no primeiro dia do mês de dezembro e recebeu 3 acessos. No segundo dia teve 9 acessos, no terceiro dia, 27 acessos, e assim por diante. Em que dia de dezembro obteve 2187 acessos? alternativa **b**

a) 6 **b)** 7 **c)** 8 **d)** 9 **e)** 10

22. (IFPR) Um fractal é uma estrutura geométrica que se repete em qualquer escala. Unindo os pontos médios dos lados de um triângulo equilátero, obtemos outro triângulo equilátero. Repetindo esse processo indefinidamente, determinamos um fractal bem simples, ilustrado na figura abaixo. Se começarmos a construção com um triângulo equilátero de lado de medida 8 unidades de comprimento, o limite para a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros que compõem o fractal será, em unidades de comprimento, de: alternativa **c**


IFPR

a) 45.
b) 46,5.
c) 48.
d) 72.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

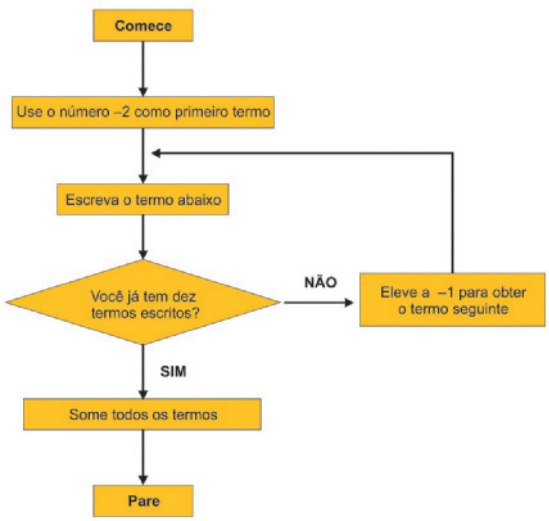
23. (Fuvest-SP) Sabe-se sobre a progressão geométrica $a_1, a_2, a_3, \ldots$ que $a_1 > 0$ e $a_6 = -9\sqrt{3}$. Além disso, a progressão geométrica $a_1, a_5, a_9, \ldots$ tem razão igual a 9. Nessas condições, o produto $a_2 \cdot a_7$ vale: alternativa **a**

a) $-27\sqrt{3}$
b) $-3\sqrt{3}$
c) $-\sqrt{3}$
d) $3\sqrt{3}$
e) $27\sqrt{3}$

24. (Fuvest-SP) Forma-se uma pilha de folhas de papel, em que cada folha tem 0,1 mm de espessura. A pilha é formada da seguinte maneira: coloca-se uma folha na primeira vez e, em cada uma das vezes seguintes, tantas quantas já houverem sido colocadas anteriormente. Depois de 33 dessas operações, a altura da pilha terá a ordem de grandeza alternativa **d**

a) da altura de um poste.
b) da altura de um prédio de 30 andares.
c) do comprimento da Av. Paulista.
d) da distância da cidade de São Paulo (SP) à cidade do Rio de Janeiro (RJ).
e) do diâmetro da Terra.

25. (Insper-SP) Um computador foi programado com as instruções que estão descritas no diagrama a seguir.



INSPER

O resultado que o computador vai apresentar depois de executar o programa é alternativa **e**

a) -9.
b) 0.
c) $-5{,}5$.
d) 8.
e) $-12{,}5$.

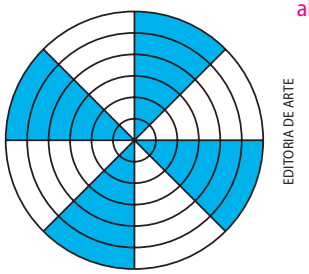
26. (UFRGS-RS) Considere a função real f definida por $f(x) = 2^{-x}$. O valor da expressão $S = f(0) + f(1) + f(2) + \ldots + f(100)$ é alternativa **e**

a) $S = 2 - 2^{-101}$.
b) $S = 2^{50} + 2^{-50}$.
c) $S = 2 + 2^{-101}$.
d) $S = 2 + 2^{-100}$.
e) $S = 2 - 2^{-100}$.

27. (Uneb-BA) O faturamento de uma clínica, no mês de janeiro de determinado ano, foi de R$ 40 000,00. Esse valor aumentou, a cada mês, segundo uma progressão geométrica, até atingir R$ 45 000,00 em julho do mesmo ano. Nessas condições, o faturamento total no 1º semestre, daquele ano, alcançou um valor, em reais, igual a alternativa **04**

01) $\dfrac{4\,000\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}$
02) $\dfrac{4\,000\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}$
03) $\dfrac{4\,500\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$
04) $\dfrac{5\,000\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}$
05) $\dfrac{5\,000\sqrt[3]{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

28. (UFSM-RS) A construção da cobertura de um palanque usado na campanha política, para o 1º turno das eleições passadas, foi realizada conforme a figura. Para fixação da lona sobre a estrutura de anéis, foram usados rebites assim dispostos: 4 no primeiro anel, 16 no segundo, 64 no terceiro e assim sucessivamente. Portanto, se a estrutura era composta de 5 anéis, o número mínimo de caixas, com 100 rebites em cada uma, utilizadas na obra, foi de: alternativa **c**


EDITORIA DE ARTE

a) 10
b) 12
c) 14
d) 16
e) 18

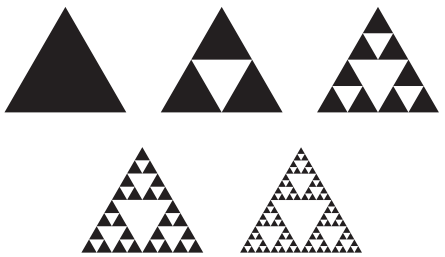
29. (UFPA) Uma colônia de bactérias dobra de número a cada dia. Supondo que cada bactéria consuma uma unidade alimentar (u.a.) por dia, uma colônia que comece no primeiro dia com 10 000 bactérias consumirá, nos 10 primeiros dias, cerca de: alternativa **c**

a) 256 000 u.a.
b) 1024 u.a.
c) 10 230 000 u.a.
d) 956 300 u.a.
e) 1 024 000 000 u.a.

30. (Uneb-BA) Considere n o cardinal de $a_n = -250$, na progressão aritmética $(-2, -6, -10, ...)$ e s, a soma dos 9 primeiros termos da progressão geométrica (3, 6, 12, 24, ...).
Desse modo, é correto afirmar que o valor de $s - n$ é alternativa **02**

01) 1596
02) 1470
03) 1246
04) 735
05) 511

31. (UFRN) A sequência de figuras abaixo representa os cinco primeiros passos da construção do conjunto de Sierpinski. Os vértices dos triângulos brancos construídos são os pontos médios dos lados dos triângulos escuros da figura anterior. Denominamos a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5, respectivamente, as áreas das regiões escuras da primeira, segunda, terceira, quarta e quinta figuras da sequência. alternativa **a**



EDITORIA DE ARTE

Podemos afirmar que a_1, a_2, a_3, a_4 e a_5 estão, nessa ordem, em progressão geométrica de razão:

a) $\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{1}{2}$ **c)** $\frac{1}{3}$ **d)** $\frac{1}{4}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

PARA REFLETIR

NÃO ESCREVA NO LIVRO

Neste Capítulo, estudamos dois tipos de sequências numéricas: as progressões aritméticas e as progressões geométricas. Vimos que tanto a PA como a PG possuem razão constante e que podemos calcular a soma dos elementos que formam esses tipos de sequências.

Além disso, nas páginas de abertura, apresentamos os desenhos *sona* para mostrar que as sociedades lidam de diferentes maneiras com a realidade à sua volta.

Se possível, pesquise mais sobre os temas abordados no Capítulo.

Agora, vamos refletir sobre as aprendizagens do Capítulo **4**: Respostas pessoais.

- Você já conhecia algum dos conteúdos apresentados neste Capítulo? Qual?
- Retornando à atividade **3** da abertura deste Capítulo, como você responderia agora a essa questão? Algo mudou em sua resposta?
- Como podemos determinar todos os termos de uma sequência numérica finita?
- Dados o 1º e o 3º termo de uma PA, como podemos descobrir o 2º termo?
- Uma PA e uma PG podem ser associadas a quais tipos de funções?
- Como podemos representar os passos envolvidos no cálculo da soma de uma PA ou de uma PG, utilizando um fluxograma?

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Capítulo 1 · Função definida por mais de uma sentença

Atividades

1. a) Função definida por mais de uma sentença

b) $f(x)=\begin{cases}1200, \text{ se } x=0\\1200+3{,}6x, \text{ se } 0<x\leqslant 25\\1200+8{,}4x, \text{ se } 25<x\leqslant 50\\1200+14{,}4x, \text{ se } 50<x\leqslant 75\\1200+20{,}4x, \text{ se } 75<x\leqslant 100\\1200+26{,}4x, \text{ se } x>100\end{cases}$

c) R$ 2.872,80 **d)** 36 alarmes

2. a) 16 **b)** -7 **c)** -18

3. a) $-\frac{4}{3}$ ou 2 **b)** -2 ou 0

5. $g(x)=\begin{cases}-x-3, \text{ se } x\leqslant -1\\-2, \text{ se } -1<x\leqslant 1\\x-3, \text{ se } x>1\end{cases}$

6. a) Resposta pessoal.

b) Pesquisa do estudante.

c) Resposta possível:

$f(x)=\begin{cases}7{,}75+1{,}25x, \text{ se } 0\leqslant x\leqslant 1\\11{,}38+6{,}38(x-1), \text{ se } 1<x\leqslant 3\\24{,}14+2{,}85(x-3), \text{ se } 3<x\leqslant 7\\36{,}81+5{,}39(x-7), \text{ se } 7<x\leqslant 14\\75{,}81+6{,}59(x-14), \text{ se } 14<x\leqslant 34\end{cases}$

d) A resposta depende do consumo verificado pelos estudantes.

7. a) apenas sobrejetora **c)** bijetora
b) nem sobrejetora nem injetora **d)** apenas injetora

8. alternativa **d**

9. alternativa **a**

10. a) $9x^2-12x+3$ **c)** $x^4+4x^3+6x^2+4x$
b) $-3x^2-6x+1$ **d)** $9x-2$

11. a) $x=\frac{2}{3}$ **b)** $x=-\frac{7}{6}$

12. $x=\frac{3}{2}$

13. 1 ou 9

14. 91

15. alternativa **c**

16. 56

17. a) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$

b) A função f não é invertível se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

18. $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$

19. a) $f^{-1}(x)=x+3$ **b)** $g^{-1}(x)=4x-2$

20. $g(x)=\frac{-x-2}{6}$

21. a) $f^{-1}(x)=\frac{3x-1}{x-2}$ **b)** $D(f^{-1})=\{x\in\mathbb{R}\mid x\neq 2\}$
c) 2

22. 3

23. a) Uma função é o inverso da outra.

b) Uma função não é a inversa da outra

c) Uma função é o inverso da outra.

d) Uma função não é a inversa da outra.

25. a) 2 **c)** 8 **e)** 5
b) 2 **d)** 7 **f)** -8

26. a) 3 **b)** 1 **c)** 6 **d)** 9

27. a) -12 **b)** $\frac{3}{7}$ **c)** -1

28. a) $-2x-2$ **b)** 2 **c)** $2x+2$

29. $3x+2$

30. a) 3 **b)** -3

31. a) sim, para $x=3$ **b)** $\frac{4}{5}$

32. $f(x)=|x+1|+2$; $D(f)=\mathbb{R}$; $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant 2\}$

34. $n=12$

35. a) Domínio da função: $D(f)=\mathbb{R}$
Imagem da função: $Im(f)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant 2\}$

b) Domínio da função: $D(g)=\mathbb{R}$
Imagem da função: $Im(g)=\{y\in\mathbb{R}\mid y\geqslant 2\}$

36. a) $S=\left\{-\frac{7}{3},\frac{5}{3}\right\}$ **b)** $S=\{-1,5\}$
c) $S=\{-6,2\}$

37. a) km 200 **b)** km 65 ou km 335

38. alternativa **d** **41.** alternativa **a** **44.** alternativa **b**
39. alternativa **d** **42.** alternativa **e** **45.** alternativa **c**
40. alternativa **e** **43.** alternativa **b**

Atividades complementares

1. alternativa **a** **4.** alternativa **b** **7.** alternativa **a**
2. alternativa **d** **5.** alternativa **d** **8.** alternativa **e**
3. alternativa **d** **6.** alternativa **c**

Capítulo 2 · Função exponencial

Atividades

1. a) $\frac{1}{64}$ **b)** 1,44 **c)** 0,01 **d)** $\frac{16}{81}$

2. a) $\sqrt[4]{5^3}$; 3,344 **d)** $\sqrt[4]{3}$; 1,316
b) $\sqrt{10}$; 3,162 **e)** $\sqrt[4]{\pi}$; 1,331
c) $\sqrt[3]{2}$; 1,1260 **f)** $\sqrt{3^{-1}}$ ou $\sqrt{\frac{1}{3}}$; 0,577

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

3. **a)** 3^9 **c)** 7^{13} **e)** 10^6
b) x^{12} **d)** 10^7 **f)** a^{2n-1}

4. **a)** 3^{-2} **c)** 2^{-5} **e)** 2^{-1}
b) 10^{-4} **d)** 6^{-2} **f)** a^{-2}

5. **a)** 11,180 **d)** 140,296 **g)** 11,665
b) 1,861 **e)** 6,063 **h)** 53,957
c) 2,300 **f)** 1,894

6. **a)** $8 \cdot 10^{-2}$ **b)** $4 \cdot 10^9$ **c)** $1{,}2 \cdot 10^{-9}$

7. **a)** $a = 27; b = -8; c = \frac{1}{9}; d = -\frac{1}{8}$
b) $-8; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; 27$

8. 2^{2011}

9. 64

10. 1

11. $n = 152$

12. **a)** $\frac{1}{6}$ **c)** $\frac{1}{4}$ **e)** $\left(\frac{5}{2}\right)^2$
b) 3^5 **d)** 7^2

13. passagem 3; $5^2 = 25$

14. 30

15. $-\frac{1}{3}$

16. 2^{23}

17. 10^{-10}

18. $\frac{13}{6}$

19. **a)** crescente **c)** decrescente
b) decrescente **d)** crescente

20. **a)** $D(f) = \mathbb{R}; Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ **d)** $D(f) = \mathbb{R}$;
b) $D(f) = \mathbb{R}; Im(f) = \mathbb{R}_+^*$ $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$
c) $D(f) = \mathbb{R}; Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

21. **b)** Sim, para $t = 1$ h e $t = 2$ h
c) Para $t > 2$, o crescimento da função 2^t é maior.
d) 2 000 bactérias

22. **a)** Aumentou no intervalo entre 20 °C e 60 °C; diminuiu no intervalo entre 80 °C e 120 °C; manteve-se estável nos intervalos entre 0 °C e 20 °C e entre 60 °C e 80 °C.
b)
- 400 000 bactérias
- 800 000 bactérias
- 1 600 000 bactérias
- 50 000 bactérias

23. $3 < k < 4$

24. **b)** crescentes
c) $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = \mathbb{R}$ e $D(h) = \mathbb{R}$; $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+^*$
d) O gráfico de m deslocaria 2 unidades na vertical para baixo.
e) O gráfico de q deslocaria 2 unidades na horizontal para a esquerda.

25. **a)** R$ 3,52
b) $f(x) = 1\,000 \cdot (1{,}0035)^x$
c) R$ 1.042,82
d) A aplicação sob regime de juro composto tem um crescimento muito maior do que a aplicação a juro simples. Além disso, o primeiro gráfico se refere a uma função exponencial e o segundo, a uma função linear.

26. **a)** $S = \{6\}$ **d)** $S = \{5\}$ **g)** $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$
b) $S = \{3\}$ **e)** $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$ **h)** $S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$
c) $S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$ **f)** $S = \{-3\}$

27. **a)** $x = 2$ **c)** $\nexists\, x \in \mathbb{R} \mid 5^{2x-1} = 0$
b) $x = \frac{1}{2}$ **d)** $x = 0$

28. **a)** $S = \{4\}$ **c)** $S = \{-1, 4\}$
b) $S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$ **d)** $S = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$

29. $S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

30. $x = \frac{3}{4}$

31. 1

32. 16 200 bactérias

33. **a)** $\beta = -\frac{1}{90}; \alpha = 54$ **b)** 360 minutos

34. 8 anos

35. $S = \{4\}$

36. $x = \frac{2}{5}$

37. $S = \{0\}$

38. $S = \left\{\frac{10}{13}\right\}$

39. 10 800 anos

40. $S = \{-1, 1\}$

41. $S = \{0, 1\}$

42. $x = 1$

43. $x = 2$ ou $x = 1$

44. I, II, IV e V

45. Resposta pessoal.

46. **a)** $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$
b) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$
c) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$
d) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{4}{3}\right\}$
e) $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{6}{7}\right\}$
f) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

47. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$
48. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
49. **a)** $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$
b) $D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$
50. **a)** $h(-1) = -\frac{3}{2}$; $h(1) = 3$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0$ ou $x > 2\}$
51. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$
52. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$
53. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
54. $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$
55. Resposta pessoal.
56. alternativa **d**
57. alternativa **b**
58. alternativa **b**
59. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$
60. alternativa **b**

Atividades complementares

1. alternativa **b**
2. alternativa **e**
3. alternativa **04**
4. alternativa **a**
5. alternativa **d**
6. alternativa **a**
7. alternativa **d**
8. alternativa **01**
9. alternativa **b**
10. alternativa **c**
11. alternativa **d**
12. alternativa **b**
13. alternativa **b**
14. alternativa **a**
15. alternativa **b**
16. alternativa **c**

Capítulo 3 · Função logarítmica

Atividades

1. **a)** 0 **b)** 1 **c)** 3 **d)** 7 **e)** 1 **f)** -5
2. **a)** $\frac{4}{3}$ **b)** -6 **c)** $\frac{1}{6}$ **d)** -4 **e)** $-\frac{5}{3}$ **f)** -5
3. **a)** -4 **b)** $-\frac{9}{2}$
4. **a)** 8 **b)** 54 **c)** 0 **d)** $\frac{4}{9}$
5. $S = \{-1, 3\}$
6. $m = 110$
7. 6 561
8. **a)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$ **b)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ **c)** $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5$ ou $x > 1\}$ **d)** $\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5\}$
9. **a)** $\simeq 2{,}041$ **b)** $\simeq 2{,}082$ **c)** $\simeq -1{,}041$ **d)** $\simeq 1{,}562$ **e)** $\simeq 0{,}082$ **f)** $\simeq -0{,}918$
10. **a)** 3 **b)** 5 **c)** 3 **d)** 2
11. **a)** 3 **b)** 13
12. 1
13. 1
14. $\frac{1}{4}$
15. $S = \{(10, 10)\}$
16. $y + 3 - 3x$
17. 1,806 milissegundo
18. **a)** $-0{,}15490$ **b)** $-0{,}92082$ **c)** 2,92117 **d)** -5 **e)** 3,21888 **f)** $-0{,}08338$
19. **a)** 76 **b)** 57 **c)** 493 **d)** 2,86
20. **a)** 0,3162 **b)** 0,7079 **c)** $-0{,}3010$ **d)** 0,3010 **e)** 2,3026 **f)** $-0{,}6931$ **g)** $-1{,}8971$ **h)** $-5{,}2983$
21.

Número (N)	Potência de 10	log N
75	$10^{1{,}875061}$	1,875061
643	$\mathbf{10^{2{,}808210}}$	2,808210
1320	$10^{3{,}120573}$	**3,120573**
1 000 000	10^{6}	**6**
0,00001	$\mathbf{10^{-5}}$	-5
0,7	$10^{-0{,}154901}$	$\mathbf{-0{,}154901}$
0,834	$\mathbf{10^{-0{,}078833}}$	$-0{,}078833$

22. **a)** $b = 3$ **b)** $b = 7$ **c)** $b = 0{,}5$ **d)** $b \simeq 0{,}367879$ **e)** $b = 1$
23. 32,5
24. 0
26. $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
$\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$
27. $\{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -3$ ou $3 \leqslant x < 6$ e $x \neq 5\}$
28.

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	2	1	0	-1	-2
$g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$	4	3	2	1	0

b) decrescentes
c) $D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$ e $\text{Im}(g) = \mathbb{R}$
d) A função g pode ser expressa como $f(x) + 2$ e, ao adicionarmos duas unidades à função $f(x)$, há um deslocamento do gráfico em duas unidades na vertical para cima.
e) O gráfico de p seria o gráfico de f deslocado 2 unidades na vertical para baixo.
f) O gráfico de q seria o gráfico de f deslocado 2 unidades na horizontal para a esquerda.
29. **a)** $f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$; $f(2) = 0$; $f(3) = 2$; $g(-4) = 1$; $g(0) = 0$; $g(2) = -1$
b) $x = \frac{7}{4}$
30. **a)** demonstração **b)** $S = \{-0{,}7; 0{,}7\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

31. $k = -\frac{1}{2} \cdot \log\left(\frac{4}{5}\right)$ e as árvores terão 29,52 metros de altura.

32. $S = \{0{,}74\}$

33. **a)** $S = \left\{\frac{1}{2}, 16\right\}$ **b)** $S = \left\{\frac{1}{256}, 16\right\}$

34. $\frac{23}{26}$

35. 255

36. 21,98 min

37. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

38. **a)** Resposta pessoal.
b) Resposta pessoal.

39. **a)** pH $\simeq$ 6,2 **b)** ácida

40. 2031 e 2033

41. **a)** $S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < 11 \text{ e } a \neq 1\}$
b) $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x < -5 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

42. $1{,}55 < t < 3{,}1$

Atividades complementares

1. alternativa **c**
2. alternativa **a**
3. alternativa **a**
4. alternativa **a**
5. alternativa **a**
6. alternativa **e**
7. alternativa **d**
8. alternativa **b**
9. alternativa **e**
10. alternativa **a**
11. alternativa **d**
12. alternativa **a**
13. alternativa **c**
14. alternativa **c**
15. alternativa **a**
16. alternativa **a**
17. alternativa **c**
18. alternativa **d**
19. alternativa **d**

Capítulo 4 · Progressões

Atividades

1. **a)** (2, 5, 8, 11, ...)
b) (1, 2, 4, 8, ...)
c) (0, 2, 0, 2, ...)
d) (0, 3, 8, 15, ...)

2. **a)** $a_5 = 16$; $a_8 = 25$
b) 16ª
c) não

3. **a)** 199
b) 50ª
c) $f(1) + f(7) = 14$; $f(2) + f(6) = 14$; $f(3) + f(5) = 14$

4. **a)** (3, 1, −3, −11, ...)
b) (2, 4, 16, 256, ...)
c) $\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$
d) $\left(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2}+1}, \ldots\right)$

5. **a)** Número de macieiras $= n^2$;
número de pinheiros $= 8n$
b) a partir de $n = 9$

6. **a)** não
b) sim, $r = 0$
c) sim, $r = -6$
d) não
e) sim, $r = 7$

7. **a)** (10, 13, 16, 19, 22)
b) (−3, 2, 7, 12, 17, 22)
c) $(a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)$

8. **a)** 3
b) −0,125
c) 1

9. **a)** É uma PA de razão 3.
b) Não é uma PA.

10. (5, 10, 15)

11. **a)** $x = 21$
b) $y = 15$
c) $x = 63$
d) $y = 7$

12. **a)** 1, 4, 7 e 10
b) 1, 2, 6 e 13

13. 87

14. 9º

15. $a_n = 5n - 3$

16. 119

17. 157 termos

18. **a)** $a_{15} = 13{,}5$
b) $a_{20} = 22 - 18\sqrt{5}$
c) $a_{10} = -17 + 10\pi$

▪ Resposta possível: Se $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_2 = \frac{8}{9}$, então $a_5 = \frac{23}{9}$.

19. 60° e 80°

20. $a_1 = 2$; $r = 2$

21. (−1, 2, 5, ...)

22. (3, 6, 9, 12, 15, 18)

23. (2, 5, 8, 11, 14)

24. **a)** $f(x) = 3x + 1$
b) $D(f) = \mathbb{N}^*$; $Im(f) = \{4, 7, 10, 13, 16, ...\}$

25. **a)** 101; 300
b) 104,9 MHz

26. 201 palitos

27. **a)** 4
b) $\frac{1}{2}$
c) −3
d) 5
e) $\sqrt{5}$
f) 2^4
g) $\frac{1}{2}$
h) 10^2

28. **a)** constante
b) decrescente
c) decrescente
d) oscilante
e) crescente
f) crescente
g) crescente
h) decrescente

29. É uma PG.

30. 36

31. $a = \frac{9}{2}$ e $b = 6$

32. 5^9

33. 16

34. 2 048

35. $q = \pm 2$

36. $q = 2$ e $a_1 = 2$

37. 32

38. 512

39. 3

40. 486

41. **a)** $A_n = 8 \cdot (1{,}5)^n$
b) 7 anos

42. $n = 5$

43. $S_6 = 555\,555$

44. 8 termos

45. 5,2 UA

46. **a)** 256
b) 1,28 m

47. 8 190 litros

48. **a)** 1 820
b) 4 704
c) 79

49. demonstração

50. **a)** $a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$; $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por:
$f(n) = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$; $S = \frac{25}{4}$

b) $a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$; $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$; $S = \frac{1}{3}$

c) $a_n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$; $f: \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ dada por:

$f(n) = \frac{10}{81} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$; $S = \frac{10}{9}$

51. a) 1 331 peças

b) (1100, 1210, 1 331, ..., 2 594)

c) $f: A \to \mathbb{R}$ definida por $f(n) = 1\,000 \cdot (1{,}1)n$, com $D(f) = A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ e $Im(f) = \{1\,100, 1\,210, 1\,331, ..., 2\,594\}$.

53. a) $S = \{2\}$ **b)** $S = \{3\}$

54. a) 67,5 **b)** $n = 8$

55. 60 metros

56. a) **I**: 3, 9, 27 e 81; **II**: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ e $\frac{1}{32}$

b) **I**: $a_n = 3^n$; **II**: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

57. $S = 8\ell$

Atividades complementares

1. alternativa **b**
2. alternativa **c**
3. alternativa **b**
4. alternativa **c**
5. alternativa **d**
6. alternativa **a**
7. alternativa **c**
8. alternativa **d**
9. alternativa **c**
10. alternativa **e**
11. alternativa **a**
12. alternativa **04**
13. alternativa **b**
14. alternativa **c**
15. alternativa **d**
16. alternativa **a**
17. alternativa **a**
18. alternativa **d**
19. alternativa **e**
20. alternativa **b**
21. alternativa **b**
22. alternativa **c**
23. alternativa **a**
24. alternativa **d**
25. alternativa **e**
26. alternativa **e**
27. alternativa **04**
28. alternativa **c**
29. alternativa **c**
30. alternativa **02**
31. alternativa **a**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR

Na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), as competências são identificadas por números (de 1 a 10) e as habilidades, por códigos alfanuméricos, por exemplo, EM13MAT103, cuja composição é explicada da seguinte maneira:

- as duas primeiras letras indicam a etapa da Educação Básica, no caso, Ensino Médio (EM);
- o primeiro par de números indica que as habilidades descritas podem ser desenvolvidas em qualquer série do Ensino Médio (13);
- a segunda sequência de letras indica a área (três letras) ou o componente curricular (duas letras): MAT = Matemática e suas Tecnologias; LGG = Linguagens e suas Tecnologias; LP = Língua Portuguesa; CNT = Ciências da Natureza e suas Tecnologias; CHS = Ciências Humanas e Sociais Aplicadas;
- os três números finais indicam a competência específica (1º número) e a habilidade específica (dois últimos números).

A seguir, os textos na íntegra das competências gerais, competências específicas e habilidades mencionadas nesta obra.

Competências gerais da Educação Básica

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.

8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

Matemática e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas e habilidades

Competência específica 1 – Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

(EM13MAT101) Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT103) Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas, e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos.

Competência específica 2 – Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.

(EM13MAT203) Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.

Competência específica 3 – Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

(EM13MAT302) Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT303) Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso.

(EM13MAT304) Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT305) Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros.

(EM13MAT313) Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro.

(EM13MAT314) Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.).

(EM13MAT315) Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema.

Competência específica 4 – Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.

(EM13MAT401) Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica.

(EM13MAT403) Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função.

(EM13MAT404) Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais.

(EM13MAT405) Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática.

Competência específica 5 – Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

(EM13MAT507) Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT508) Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas.

(EM13MAT510) Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada.

Ciências da Natureza e suas Tecnologias no Ensino Médio: competências específicas

Competência específica 1 – Analisar fenômenos naturais e processos tecnológicos, com base nas interações e relações entre matéria e energia, para propor ações individuais e coletivas que aperfeiçoem processos produtivos, minimizem impactos socioambientais e melhorem as condições de vida em âmbito local, regional e global.

Competência específica 2 – Analisar e utilizar interpretações sobre a dinâmica da Vida, da Terra e do Cosmos para elaborar argumentos, realizar previsões sobre o funcionamento e a evolução dos seres vivos e do Universo, e fundamentar e defender decisões éticas e responsáveis.

Competência específica 3 – Investigar situações-problema e avaliar aplicações do conhecimento científico e tecnológico e suas implicações no mundo, utilizando procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza, para propor soluções que considerem demandas locais, regionais e/ou globais, e comunicar suas descobertas e conclusões a públicos variados, em diversos contextos e por meio de diferentes mídias e tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC).

BIBLIOGRAFIA COMENTADA

ALMEIDA, L. W. de.; SILVA K. P.; VERTUAN, R. E. **Modelagem matemática na Educação Básica**. São Paulo: Contexto, 2016.

- Essa obra proporciona oportunidades de integração envolvendo atividades normalmente desenvolvidas nas aulas de Matemática e em situações do dia a dia, no que tange a aspectos econômicos, sociais e ambientais.

BONOMI, M. C.; LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1 ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.

- Esse material aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução de Helena de Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2012.

- O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática, destacando a fascinante relação da humanidade com números, formas e padrões ao longo do tempo.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF: Presidência da República, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1 000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conhecido como o Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes públicas e privadas de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 14 ago. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da saúde. **Guia Alimentar para a População Brasileira**. 2ª ed. Brasília, DF, 2014. Disponível em: http://189.28.128.100/dab/docs/portaldab/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento explicativo sobre os temas transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, J.; CARRANO, P.; MAIA, C. L. **Juventude e Ensino Médio**: diálogo, sujeitos e currículo. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 17. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta uma explicação sobre a história do matemático Leonardo Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. Campos dos Goytacazes: UENF-RJ, 2016.

- O material explora a utilização do *software* GeoGebra e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

DOMINGUES, H. H.; IEZZI, G. **Álgebra moderna**. 4. ed. reformulada. São Paulo: Atual, 2003.

- Essa obra apresenta conceitos matemáticos como conjuntos, funções, entre outros, destacando demonstrações e a importância de uma linguagem formal na escrita matemática.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Ed. da Unicamp, 2007.

- O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática organizados de forma cronológica.

FAZENDA, I. C. A. **Interdisciplinaridade**: história, teoria e pesquisa. 18. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Magistério: Formação e Trabalho Pedagógico).

- Essa obra propõe reflexões sobre a construção de um saber mais integrado e livre, destacando a reunião de diferentes áreas de conhecimento permeando o processo de ensino e aprendizagem.

KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8. ed. Campinas: Papirus, 2012. (Coleção Papirus Educação).

- Essa obra busca refletir sobre as relações entre educação e tecnologias, evitando jargões, teorias e abordagens específicas desses campos de conhecimento, de modo que as discussões propostas sejam mais acessíveis a todos.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. 9. ed. São Paulo: SBM, 2006. 3. v. (Coleção do professor de Matemática).

- Livro que aborda conceitos matemáticos desenvolvidos no Ensino Médio, destacando demonstrações e atividades de aprofundamento.

LOPES, C. A. E.; NACARATO, A. M. (org.). **Escritas e leituras na educação matemática**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2009.

- Livro que traz um compilado de artigos discutindo perspectivas consideradas fundamentais no ensino de Matemática, que deve focalizar os saberes do estudante, incentivando a criação dos próprios procedimentos e o desenvolvimento do raciocínio e da criatividade, priorizando a aquisição e a comunicação em linguagem matemática.

MACHADO, N. J. **Epistemologia e didática**: as concepções de conhecimento e inteligência e a prática docente. 6. ed. São Paulo: Cortez, 2005.

- Essa obra apresenta reflexões que buscam articular questões epistemológicas e ações docentes, bem como analisar formas usuais do trabalho escolar propondo alternativas didáticas.

MELO, M. C. P.; JUSTULIN, A. M. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XV, 2019, Londrina. **Anais** [...]. Londrina: SBEM-PR, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresentação teórica e prática da metodologia de resolução de problemas.

MONTEIRO, M. S.; CERRI, C. **História dos números complexos**. São Paulo: CAEM – IME-USP, 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

PATERLINI, R. R. Técnicas de máximos e mínimos. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 35. SBM. Rio de Janeiro. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/35/6.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo no qual são investigadas situações-problema por meio de diferentes técnicas para encontrar os valores de máximo ou de mínimo da função.

POMMER, W. M. **O número de Euler**: possíveis abordagens no ensino básico. São Paulo: FEUSP, 2010. Disponível em: https://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Esse material apresenta aspectos históricos sobre o número de Euler que contribuem para ampliar o estudo sobre o tema.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2003.

- Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

PORTAL DA OBMEP. Rio de Janeiro. Disponível em: https://portaldaobmep.impa.br/. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Portal que disponibiliza materiais teóricos, videoaulas e atividades interativas sobre Matemática na Educação Básica.

ROQUE, T. **História da matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. 1. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

- Esse é o primeiro livro de história da Matemática publicado no Brasil, escrito por uma autora que apresenta um olhar crítico de como a história da matemática tem sido contada ao longo do tempo.

SKOVSMOSE, O. **Educação matemática crítica**: a questão da democracia. Tradução de Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo. 6. ed. Campinas: Papirus, 2013. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

- Neste livro, as discussões destacam a importância da perspectiva democrática na educação matemática e o seu caráter emancipatório, enfatizando o papel da modelagem na educação matemática.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.

- Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

UNESCO. **Declaração mundial sobre educação para todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, 1990. Brasília, DF: Unesco, 1998. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **RPM**, Rio de Janeiro, n. 33. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.

- Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

ZABALA, A.; ARNAU, L. **Como aprender e ensinar competências**. Tradução de Carlos Henrique Lucas Lima. Porto Alegre: Artmed, 2010.

- Uma obra que apresenta um novo enfoque no ensino e na aprendizagem de competências, priorizando as capacidades cognitivas, em relação à aquisição de conhecimento.

SIGLAS DE VESTIBULARES

AFA-SP: Academia da Força Aérea
Cesgranrio-RJ: Fundação Cesgranrio
Enem/MEC: Exame Nacional do Ensino Médio
Epcar-MG: Escola Preparatória de Cadetes do Ar
EsPCEx-SP: Escola Preparatória de Cadetes do Exército
ESPM-SP: Escola Superior de Propaganda e Marketing
Fafeod-MG: Faculdade Federal de Odontologia de Diamantina
FEI-SP: Faculdade de Engenharia Industrial
FGV-SP: Fundação Getúlio Vargas (SP)
Furg-RS: Universidade Federal do Rio Grande
Fuvest-SP: Fundação Universitária para o Vestibular
IFCE: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
IFMG: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais
IFMS: Instituto Federal de Mato Grosso do Sul
IFPR: Instituto Federal do Paraná
IFSul-RS: Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-Rio-Grandense
IME-RJ: Instituto Militar de Engenharia
Insper-SP: Instituto de Ensino e Pesquisa
ITA-SP: Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Mack-SP: Universidade Presbiteriana Mackenzie
PUCCamp-SP: Pontifícia Universidade Católica de Campinas
PUC-MG: Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
PUC-PR: Pontifícia Universidade Católica do Paraná
PUC-RJ: Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro
PUC-SP: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Santa Casa-SP: Faculdade de Ciências Médicas da Santa Casa de São Paulo
Udesc-SC: Universidade do Estado de Santa Catarina
UEA-AM: Universidade do Estado do Amazonas
UECE: Universidade Estadual do Ceará
UEG-GO: Universidade Estadual de Goiás
UEL-PR: Universidade Estadual de Londrina
UEPA: Universidade do Estado do Pará
UEPB: Universidade Estadual da Paraíba
UERJ: Universidade do Estado do Rio de Janeiro
UERN: Universidade Estadual do Rio Grande do Norte
Uespi-PI: Universidade Estadual do Piauí
UFAL: Universidade Federal de Alagoas
UFAM: Universidade Federal do Amazonas
UFG-GO: Universidade Federal de Goiás
UFJF-MG: Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG: Universidade Federal de Minas Gerais
UFMS: Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
UFMT: Universidade Federal de Mato Grosso
Ufop-MG: Universidade Federal de Ouro Preto
UFPA: Universidade Federal do Pará
UFPB: Universidade Federal da Paraíba
UFPel-RS: Universidade Federal de Pelotas
UFPR: Universidade Federal do Paraná
UFRGS-RS: Universidade Federal do Rio Grande do Sul
UFRJ: Universidade Federal do Rio de Janeiro
UFRN: Universidade Federal do Rio Grande do Norte
UFSC: Universidade Federal de Santa Catarina
UFSM-RS: Universidade Federal de Santa Maria
UFV-MG: Universidade Federal de Viçosa
Uneb-BA: Universidade do Estado da Bahia
Unemat-MT: Universidade do Estado de Mato Grosso
Unicamp-SP: Universidade Estadual de Campinas
Unifei-SP: Universidade Federal de Itajubá
Unifor-CE: Universidade de Fortaleza
Unilasalle-RS: Universidade La Salle
Unimontes-MG: Universidade Estadual de Montes Claros
USCS-SP: Universidade de São Caetano do Sul
Vunesp-SP: Fundação para o Vestibular da Universidade Estadual Paulista

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Orientações para o professor

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Apresentação

Caro professor,

Atualmente, o ensino de Matemática, assim como o de outras áreas do conhecimento, está pautado pelas indicações presentes nos documentos oficiais, principalmente na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

As perspectivas desse trabalho estão voltadas para atender os estudantes do século XXI, reconhecendo que "as rápidas transformações na dinâmica social contemporânea nacional e internacional, em grande parte decorrentes do desenvolvimento tecnológico, atingem diretamente as populações jovens e, portanto, suas demandas de formação" (BNCC, 2018, p. 462).

Diante desse cenário, ensinar Matemática hoje significa desenvolver nos estudantes competências e habilidades apoiadas em noções, conceitos e métodos matemáticos que possibilitem a eles empregar estratégias próprias e criar soluções por meio da observação, da análise, do estabelecimento de conexões, do levantamento de conjecturas, percebendo e expressando regularidades.

Promover tais ações nos estudantes requer que você, professor, tenha domínio dos conteúdos da área, identifique as dificuldades de aprendizagem deles e, com o apoio de estudos da Educação Matemática, ajude-os a superá-las, favorecendo a autonomia e a cooperação em sala de aula.

Cientes disso, e com a intenção de poder contribuir para o trabalho docente, elaboramos estas **Orientações para o professor**, nas quais, além das discussões sobre os conteúdos e métodos de ensino, procuramos fornecer subsídios para o seu trabalho como professor, por meio de comentários sobre as seções e os conteúdos abordados, além de sugerir leituras complementares a fim de colaborar com a sua formação.

Na parte específica de cada Volume, fazemos observações e sugestões que visam enriquecer, tanto no aspecto teórico como no metodológico, os temas abordados nos Capítulos, e apresentamos as respostas e resoluções das atividades.

Para finalizar, desejamos a você muito sucesso em seu trabalho e esperamos que estas orientações possam ajudar a aprimorar sua prática pedagógica.

Os autores

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Sumário

O Novo Ensino Médio 164

A BNCC 166

Temas Contemporâneos Transversais (TCTs) 168

Competências socioemocionais 169

O ensino da Matemática 170

A BNCC e o ensino de Matemática 170

Metodologias ativas 175

O papel do professor 180

Pensamento computacional 182

Avaliação 183

Volumes da obra 185

Estrutura da obra 186

Bibliografia consultada e comentada 188

Comentários e sugestões de abordagem para este Volume 190

Capítulo 1 194

Capítulo 2 211

Capítulo 3 226

Capítulo 4 238

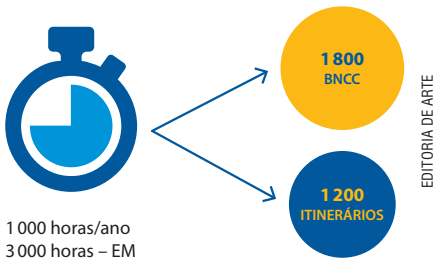
Resolução das atividades 250

O NOVO ENSINO MÉDIO

A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB/lei nº 9.394/1996) já trazia em suas indicações para o Ensino Médio a necessidade de, nessa etapa da Educação Básica, haver para os estudantes o aprofundamento de conhecimentos adquiridos no Ensino Fundamental para o prosseguimento dos estudos; uma preparação básica para o trabalho e para a cidadania; seu aprimoramento ético; o desenvolvimento de autonomia intelectual e do pensamento crítico, além da compreensão dos processos produtivos vinculados a processos científicos e tecnológicos[1].

A lei da reforma do Ensino Médio, de 2017, conhecida como a que instaurou o Novo Ensino Médio, buscou tornar mais exequíveis e efetivas as ações para a consolidação do que foi previsto na LDB, determinando às escolas 3 000 horas de aulas para os três anos de curso, sendo um total máximo de 1 800 horas de formação geral básica, para atendimento da BNCC, e o mínimo de 1 200 horas para o cumprimento de itinerários formativos.

Novo Ensino Médio
Ampliação da carga horária



A distribuição dessa carga horária pode ser flexibilizada de acordo com as escolhas e necessidades de cada região, sendo possível fazer uma distribuição de horas para cada uma das séries do Ensino Médio. Os exemplos apresentados a seguir são algumas das possibilidades (em amarelo, estão destacadas as horas referentes à formação geral básica e, em azul, as referentes aos itinerários formativos).

Novo Ensino Médio
Possibilidades de distribuição da carga horária

[1] Artigo 35 da LDB. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm. Acesso em: 5 set. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Outro aspecto a ser considerado é que, para as 1 800 horas de formação geral básica, também existe a flexibilização de distribuição da carga horária dos diferentes componentes de cada uma das áreas: Linguagens e suas Tecnologias (Arte, Educação Física, Língua Inglesa e Língua Portuguesa); Matemática e suas Tecnologias (Matemática), Ciências da Natureza e suas Tecnologias (Biologia, Física e Química) e Ciências Humanas e Sociais Aplicadas (História, Geografia, Sociologia e Filosofia). Destaca-se o fato de que os componentes Língua Portuguesa e Matemática devem ser oferecidos nas três séries.

Uma sugestão de distribuição da carga horária é destinar 600 horas para a área de Linguagens e suas Tecnologias (sendo 400 horas voltadas para Língua Portuguesa e 200 horas para as Linguagens: Arte, Educação Física e Língua Inglesa) e 400 horas para cada uma das outras áreas.

Áreas do conhecimento	Carga horária
Linguagens e suas Tecnologias	200 h
Língua Portuguesa	400 h
Matemática e suas Tecnologias	400 h
Ciências da Natureza e suas Tecnologias	400 h
Ciências Humanas e Sociais Aplicadas	400 h
Total	1 800 h

A estruturação por áreas de conhecimento se dá na perspectiva de fortalecimento das relações entre os componentes curriculares que delas fazem parte, tendo em vista a resolução de problemas contextualizados e voltados para a intervenção na realidade. Apoiada nesses pressupostos, a BNCC destaca a necessidade de escolas e professores proporcionarem aos estudantes

> experiências e processos que lhes garantam as aprendizagens necessárias para a leitura da realidade, o enfrentamento dos novos desafios da contemporaneidade (sociais, econômicos e ambientais) e a tomada de decisões éticas e fundamentadas (BNCC, 2018, p. 463).

Tais aprendizagens possibilitam aos estudantes atingirem o que o Novo Ensino Médio propõe, que é a ampliação das condições de inclusão social por meio do acesso à ciência, à tecnologia, à cultura e ao trabalho, como apresentado no Parecer CNE/CEB nº 5/2011.

Por outro lado, esse mesmo parecer destaca que o rápido desenvolvimento tecnológico e a ampliação de seu acesso pelas pessoas em geral vêm provocando mudanças profundas nas dinâmicas sociais, no reconhecimento e valorização de diferentes culturas, nas relações com o mundo do trabalho e suas incertezas futuras. Essas mudanças afetam mais diretamente os jovens que, portanto, demandam uma formação mais adequada a esses novos tempos.

Pensar nessa formação exige a tomada de consciência de que na etapa do Ensino Médio, como apontado nas Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (DCN, 2013), temos um contingente de pessoas que precisam ser consideradas em sua multiplicidade e reconhecidas como participantes ativas nos diversos meios nos quais estão inseridas e que, por isso, carregam consigo várias culturas juvenis ou muitas juventudes.

Compreender as modificações da sociedade e, por conseguinte, as mudanças nos perfis dos sujeitos escolares é também um caminho que precisa ser percorrido. São várias as formas de sociabilidade existentes na vida cotidiana dos jovens e incorporar as manifestações juvenis ao processo educativo exige do professor a sensibilidade de estar aberto ao

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

diálogo e atento aos desafios que a contemporaneidade lança para a escola. Não é possível deixar de considerar que a escola é um espaço de encontro de inúmeras manifestações diferentes entre si, um local que se constitui de culturas diversas, de valores diversos e de diferentes perspectivas de olhar para o mundo e planejar o futuro.

O Novo Ensino Médio aponta que um modo de trabalhar com essa diversidade é por meio do estímulo à participação ativa, que pode propiciar aos jovens vivenciar valores como os da solidariedade e da democracia e permitir o aprendizado da alteridade. Isso significa, em última instância, aprender a respeitar, perceber e reconhecer o outro e suas diferenças, além do desenvolvimento de habilidades discursivas e argumentativas. O exercício da participação pode ser, então, uma experiência decisiva para a vida dos jovens.

Esses fatores implicam numa organização escolar que promova e garanta aos estudantes serem protagonistas e interlocutores em seu percurso escolar possibilitando

> [...] uma formação que, em sintonia com seus percursos e histórias, permita-lhes definir seu **projeto de vida**, tanto no que diz respeito ao estudo e ao trabalho como também no que concerne às escolhas de estilos de vida saudáveis, sustentáveis e éticos (BNCC, 2018, p. 463).

Essas considerações sobre o perfil do público-alvo da etapa do Ensino Médio e a busca por atender às suas necessidades e expectativas de vida reforçam a decisão de se ter uma composição curricular estruturada por áreas de conhecimento. Desse modo, será possível cada rede de ensino ou unidade escolar montar seu cronograma de trabalho, tendo em vista as necessidades específicas dos espaços em que estão inseridas. Assim, a distribuição das cargas horárias relativas a cada área e, consequentemente, a cada um dos componentes curriculares que as compõem pode ser feita por bimestre, trimestre ou semestre.

> A BNCC

Os desafios impostos à educação escolar de um público múltiplo e dinâmico inserido em uma efervescência de desenvolvimento em todas as áreas, provocado principalmente pelo avanço tecnológico, exigem um novo olhar e um posicionamento sobre a abordagem a ser dada ao conhecimento a ser construído e à constituição de um sujeito consciente de toda a contribuição que ele pode dar ao mundo de modo geral.

Para que essa **formação integral** seja possível, estudos em Educação têm indicado e construções curriculares de diferentes países têm assumido que o ensino precisa estar orientado ao desenvolvimento de competências e habilidades.

A BNCC também apresenta tal posicionamento, e diante do fato de que ao termo **competência** têm se dado diferentes significados, ela apresenta a definição a ser considerada:

> [...] **competência** é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (BNCC, 2018, p. 8).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No que tange ao termo **habilidade**, o documento também especifica:

> As **habilidades** expressam as aprendizagens essenciais que devem ser asseguradas aos alunos nos diferentes contextos escolares (BNCC, 2018, p. 29).

Em outro trecho, esse documento destaca que o desenvolvimento de competências exige que

> [...] as decisões pedagógicas devem estar orientadas para o desenvolvimento de competências. Por meio da indicação clara do que os alunos devem "saber" (considerando a constituição de conhecimentos, habilidades, atitudes e valores) e, sobretudo, do que devem "saber fazer" (considerando a mobilização desses conhecimentos, habilidades, atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho) [...] (BNCC, 2018, p. 13).

Dessa forma, a BNCC delega à escola uma função social urgente, tendo em vista o mundo globalizado e a consequente necessidade de pessoas que saibam fazer e que tenham a capacidade de planejar e resolver problemas, que saibam ler o mundo através de palavras, imagens, fatos, números, códigos e outras linguagens, usando esses recursos para saber agir e saber conviver.

As competências gerais apresentadas pela BNCC têm o propósito do desenvolvimento integral do estudante:

1. Valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo físico, social, cultural e digital para entender e explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.
2. Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas.
3. Valorizar e fruir as diversas manifestações artísticas e culturais, das locais às mundiais, e também participar de práticas diversificadas da produção artístico-cultural.
4. Utilizar diferentes linguagens – verbal (oral ou visual-motora, como Libras, e escrita), corporal, visual, sonora e digital –, bem como conhecimentos das linguagens artística, matemática e científica, para se expressar e partilhar informações, experiências, ideias e sentimentos em diferentes contextos e produzir sentidos que levem ao entendimento mútuo.
5. Compreender, utilizar e criar tecnologias digitais de informação e comunicação de forma crítica, significativa, reflexiva e ética nas diversas práticas sociais (incluindo as escolares) para se comunicar, acessar e disseminar informações, produzir conhecimentos, resolver problemas e exercer protagonismo e autoria na vida pessoal e coletiva.
6. Valorizar a diversidade de saberes e vivências culturais e apropriar-se de conhecimentos e experiências que lhe possibilitem entender as relações próprias do mundo do trabalho e fazer escolhas alinhadas ao exercício da cidadania e ao seu projeto de vida, com liberdade, autonomia, consciência crítica e responsabilidade.
7. Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns que respeitem e promovam os direitos humanos, a consciência socioambiental e o consumo responsável em âmbito local, regional e global, com posicionamento ético em relação ao cuidado de si mesmo, dos outros e do planeta.
8. Conhecer-se, apreciar-se e cuidar de sua saúde física e emocional, compreendendo-se na diversidade humana e reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas.
9. Exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos, com acolhimento e valorização da diversidade de indivíduos e de grupos sociais, seus saberes, identidades, culturas e potencialidades, sem preconceitos de qualquer natureza.
10. Agir pessoal e coletivamente com autonomia, responsabilidade, flexibilidade, resiliência e determinação, tomando decisões com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários.

EDITORIA DE ARTE

(BNCC, 2018, p. 9 e 10)

Tendo em vista que o desenvolvimento de competências é a proposta de ensino, deve-se repensar o estudo de conteúdos, o que significa não menosprezá-los, mas sim mudar o foco do trabalho com eles. A memorização de fatos e/ou procedimentos referentes aos conteúdos abordados nos diferentes componentes curriculares não precisa ser totalmente abandonada, porém deve fazer sentido para os estudantes. Na medida do possível, as situações propostas devem buscar estabelecer integração entre as diferentes áreas, possibilitando o emprego de noções e conhecimentos matemáticos, geográficos, biológicos etc., além de um domínio da língua.

Esses elementos apontam que o ensino por competências exige o repensar da prática docente. O professor precisa reconhecer que os objetos de conhecimento devem ser apresentados, sempre que possível, por meio de situações e problemas contextualizados que provoquem conflitos e exijam que os estudantes mobilizem seus processos cognitivos de observação, visualização, compreensão, organização, análise e síntese como suporte para a elaboração de argumentação consistente. É necessário lembrar que muitas situações matemáticas podem ser contextualizadas por meio de questões internas à própria Matemática e por meio da análise de seus procedimentos. Tais ações se concretizam com propostas a serem desenvolvidas em grupo, pois o trabalho colaborativo direciona para discussões, considerações e reconsiderações das estratégias e dos erros. Ao propor a resolução das atividades presentes no livro, é importante formar duplas ou quartetos colaborativos.

Temas Contemporâneos Transversais (TCTs)

Trazer para a sala de aula problematizações sobre temas vividos pelas pessoas em seu dia a dia e que influenciam suas vidas é uma forma de tratar dos Temas Contemporâneos Transversais (TCTs), que são referidos na BNCC. Esses temas não se vinculam a uma determinada área ou disciplina escolar, pelo contrário, devem ser abordados por todas elas. Eles devem ser considerados como um conjunto de aprendizagens essenciais e indispensáveis a que todos os estudantes, crianças, jovens e adultos têm direito.

A importância desse trabalho é a possibilidade de transformar a escola em um espaço voltado para a compreensão da realidade social e dos direitos e responsabilidades de todos em relação à sua vida pessoal, coletiva e ambiental. Esses temas são indicados por serem "aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional"[2].

Veja a seguir os temas propostos.

(BRASIL, 2019, p. 13)

[2] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas contemporâneos transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 25 jul. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

É preciso considerar as possibilidades de integração dos assuntos específicos de cada área com esses temas, pois eles têm um caráter social e político e são um caminho promissor para os estudantes reconhecerem suas reais possibilidades de ação sobre a realidade em que vivem. Ao mesmo tempo, essa integração pode contribuir muito para a valorização dos conhecimentos escolares. Além disso, essa abordagem é profundamente significativa para a construção da cidadania e para a participação ativa do estudante na vida em sociedade. Além da possibilidade do desenvolvimento das habilidades específicas da área, há um grande potencial para que atitudes e valores sejam colocados em discussão dentro da sala de aula.

Competências socioemocionais

A incorporação de atitudes e valores pelos estudantes está intimamente ligada ao desenvolvimento de competências socioemocionais. Tais competências são consideradas cruciais para a construção de um percurso escolar que promova a educação integral do estudante, preparando-o para sua vida futura.

Tais competências dizem respeito ao se relacionar com os outros e consigo mesmo, a compreender e gerir emoções, a estabelecer e atingir objetivos, a tomar decisões autônomas e responsáveis e a enfrentar situações adversas de maneira criativa e construtiva.

Estudos e discussões sobre quais estudantes se saem melhor em atividades escolares indicam aqueles que apresentam características como organização, persistência, resiliência, enfrentamento e resolução de conflitos com controle da frustração e da ansiedade, além de autoestima, confiança e criatividade. A partir dessas conclusões, torna-se, então, evidente que o desenvolvimento cognitivo do jovem não se dá de modo isolado do seu desenvolvimento socioemocional. Desse modo, as propostas do Novo Ensino Médio, com indicação de novos enfoques para o ensino, com sugestão de abordagens em que a aprendizagem colaborativa e a autonomia estejam presentes, estão apontando para um caminho promissor que conduz a uma educação mais abrangente.

De forma coerente com as políticas integradoras, essas transformações devem se manifestar em diferentes oportunidades de aprendizagem, tendo o professor um papel fundamental, tanto na criação de novas atividades quanto no planejamento e na condução das rotinas e ações que já têm lugar na escola. O professor, como mediador, pode integrar a esses momentos propostas em que os estudantes, distribuídos em duplas, trios ou quartetos, possam discutir e colaborar entre si na resolução de problemas.

Em trabalhos colaborativos, o objetivo não é a homogeneização do pensamento e do conhecimento dos sujeitos participantes. Deve-se rejeitar o autoritarismo e a condução pedagógica com motivação hierárquica. Ao contrário, a colaboração entre os pares tem como objetivo a reconstrução do conhecimento dos participantes. Para isso, é importante respeitar a individualidade de cada sujeito, seus recursos e seu ritmo pessoal. Esse tipo de trabalho permite que as pessoas nele envolvidas passem a reconhecer o que sabem, o que os outros sabem e o que todos não sabem, resultando na busca de superação dos limites de cada um e do grupo como um todo.

Para que esse tipo de interação ocorra nos grupos colaborativos é essencial que o professor determine quais serão os participantes não pela amizade ou proximidade de localização na sala, mas sim por características que possibilitem que todos tenham voz no grupo e sejam considerados como participantes necessários. Essa ação favorece o desenvolvimento da autoestima, confiança e criatividade, o que promoverá o desenvolvimento cognitivo dos estudantes, além de fornecer as bases para a aceitação social.

A mediação do professor é o ponto-chave de todo esse processo por meio de suas intervenções, com a acolhida de diferentes pontos de vista e de discussões realizadas principalmente com perguntas que instiguem os estudantes a justificarem seu posicionamento e conclusões. As questões podem ser do tipo: *"Todos chegaram a essa conclusão ou alguém teve alguma consideração um pouco diferente dessa?"*; *"E se fosse de tal forma? Vocês pensaram nessa outra possibilidade?"*; *"Vocês levaram em consideração outros pontos de vista?"*; *"Apoiaram-se no que já estudamos antes a respeito desse assunto?"*; *"Que tal olharem também em outros livros e* sites *para dar maior respaldo ao que estão afirmando?"* etc.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

O ENSINO DA MATEMÁTICA

Pensar o ensino de Matemática exige pensar o que significa aprender Matemática. As perspectivas atuais de educadores matemáticos consagram que para **aprender** Matemática é preciso **fazer** Matemática.

Esse **fazer** significa se engajar em uma atividade que promova a observação e análise de dados e informações, o estabelecimento de conexões e relações, a criação de conjecturas, a identificação e expressão de regularidades, a busca de explicações, a criação de soluções, a invenção de estratégias próprias que envolvam noções, conceitos e procedimentos matemáticos, a validação de suas produções e a sua comunicação com seus pares.

Assim, **ensinar** Matemática é, para um professor, criar as condições que possibilitarão que os estudantes **façam** Matemática. Embora possa parecer que essa seja uma missão impossível, na verdade, trata-se de promover em sala de aula uma atitude investigativa por parte dos estudantes, possibilitando a eles mobilizarem sua intuição e conhecimentos antigos em alternativas diversas de exploração. Esse tipo de atividade

> ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor (PONTE; BROCADO; OLIVEIRA, 2003, p. 23).

Tendo como pressuposto que todos podem produzir Matemática, nas suas diferentes expressões, as atividades de investigação podem contribuir para aulas de Matemática mais dinâmicas e interessantes.

Chamar o estudante a agir como um matemático não implica obrigatoriamente em trabalhar com problemas muito difíceis. Ponte, Brocado e Oliveira (2003) destacam que, pelo contrário, investigar **significa trabalhar com questões que nos interpelam** e, por isso, constitui uma poderosa forma de construir conhecimento. Assim, é em torno de um ou mais problemas que uma investigação matemática se desenvolve, porém as descobertas que ocorrem durante a busca da solução podem ser tão ou mais importantes do que a própria solução.

A BNCC e o ensino de Matemática

No Ensino Médio, a área de Matemática e suas Tecnologias, de acordo com a BNCC, tem a responsabilidade de aproveitar todo o potencial já constituído por esses estudantes no Ensino Fundamental para promover ações que ampliem o letramento matemático iniciado na etapa anterior. O conceito de letramento matemático considerado pelo documento apoia-se naquele utilizado pelo Programa Internacional de Avaliação dos Estudantes (Pisa). Assim, é

> [...] definido como as competências e habilidades de raciocinar, representar, comunicar e argumentar matematicamente, de modo a favorecer o estabelecimento de conjecturas, a formulação e a resolução de problemas em uma variedade de contextos, utilizando conceitos, procedimentos, fatos e ferramentas matemáticas [...] (BNCC, 2018, p. 266).

Nessa etapa da Educação Básica, há que se considerar que o desenvolvimento intelectual dos jovens permite maior capacidade de abstração e potencializa o pensar de modo

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

rigoroso e criativo na resolução de problemas. Desse modo, para além da simples ampliação de conteúdo, é importante destacar a perspectiva integradora da Matemática, como uma organização que se estabelece em torno de temas, questões e problemas cuja finalidade de aprendizagem não é apenas saber os conteúdos matemáticos, mas saber usá-los como suporte para a realização de uma reflexão crítica. Pretende-se que, ao final do Ensino Médio, os estudantes tenham se apropriado de seu papel como cidadãos em um contexto social, político, cultural e econômico.

Tal posicionamento exige que a postura no trato com as propostas matemáticas escolares considere a busca de problemas fora da Matemática, de modo a proporcionar aos estudantes a consciência de que essa área do conhecimento se abre para muitas outras nas quais ela pode ser utilizada como uma ferramenta de compreensão e análise. Porém, é preciso destacar que a presença da Matemática nas diversas áreas do conhecimento não ocorre somente por meio dos registros fornecidos pelos fatos e fenômenos estudados, mas também pelo seu amplo conjunto de procedimentos para cálculo, análise, medição e estimativa dos fenômenos da realidade e de suas relações. Esse fato é o que traz a necessidade de também se trabalhar de modo cuidadoso a linguagem, definições e procedimentos matemáticos que darão suporte às resoluções dos problemas.

As competências específicas e as habilidades vinculadas à área de Matemática, apresentadas na BNCC, expressam esses aspectos conferindo a professores e estudantes maiores oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e também em outras áreas do conhecimento. A Matemática pode ser identificada na base de uma série de processos que organizam a vida contemporânea, ao mesmo tempo em que aponta os conhecimentos específicos a serem construídos, como pode ser visto no quadro a seguir.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 1 Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.	**(EM13MAT101)** Interpretar criticamente situações econômicas, sociais e fatos relativos às Ciências da Natureza que envolvam a variação de grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT102)** Analisar tabelas, gráficos e amostras de pesquisas estatísticas apresentadas em relatórios divulgados por diferentes meios de comunicação, identificando, quando for o caso, inadequações que possam induzir a erros de interpretação, como escalas e amostras não apropriadas. **(EM13MAT103)** Interpretar e compreender textos científicos ou divulgados pelas mídias, que empregam unidades de medida de diferentes grandezas e as conversões possíveis entre elas, adotadas ou não pelo Sistema Internacional (SI), como as de armazenamento e velocidade de transferência de dados, ligadas aos avanços tecnológicos. **(EM13MAT104)** Interpretar taxas e índices de natureza socioeconômica (índice de desenvolvimento humano, taxas de inflação, entre outros), investigando os processos de cálculo desses números, para analisar criticamente a realidade e produzir argumentos. **(EM13MAT105)** Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para construir figuras e analisar elementos da natureza e diferentes produções humanas (fractais, construções civis, obras de arte, entre outras). **(EM13MAT106)** Identificar situações da vida cotidiana nas quais seja necessário fazer escolhas levando-se em conta os riscos probabilísticos (usar este ou aquele método contraceptivo, optar por um tratamento médico em detrimento de outro etc.).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 2 Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.	**(EM13MAT201)** Propor ou participar de ações adequadas às demandas da região, preferencialmente para sua comunidade, envolvendo medições e cálculos de perímetro, de área, de volume, de capacidade ou de massa. **(EM13MAT202)** Planejar e executar pesquisa amostral sobre questões relevantes, usando dados coletados diretamente ou em diferentes fontes, e comunicar os resultados por meio de relatório contendo gráficos e interpretação das medidas de tendência central e das medidas de dispersão (amplitude e desvio padrão), utilizando ou não recursos tecnológicos. **(EM13MAT203)** Aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas (para o controle de orçamento familiar, simuladores de cálculos de juros simples e compostos, entre outros), para tomar decisões.
Competência específica 3 Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.	**(EM13MAT301)** Resolver e elaborar problemas do cotidiano, da Matemática e de outras áreas do conhecimento, que envolvem equações lineares simultâneas, usando técnicas algébricas e gráficas, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT302)** Construir modelos empregando as funções polinomiais de 1º ou 2º graus, para resolver problemas em contextos diversos, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT303)** Interpretar e comparar situações que envolvam juros simples com as que envolvem juros compostos, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso. **(EM13MAT304)** Resolver e elaborar problemas com funções exponenciais nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como o da Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT305)** Resolver e elaborar problemas com funções logarítmicas nos quais seja necessário compreender e interpretar a variação das grandezas envolvidas, em contextos como os de abalos sísmicos, pH, radioatividade, Matemática Financeira, entre outros. **(EM13MAT306)** Resolver e elaborar problemas em contextos que envolvem fenômenos periódicos reais (ondas sonoras, fases da lua, movimentos cíclicos, entre outros) e comparar suas representações com as funções seno e cosseno, no plano cartesiano, com ou sem apoio de aplicativos de álgebra e geometria. **(EM13MAT307)** Empregar diferentes métodos para a obtenção da medida da área de uma superfície (reconfigurações, aproximação por cortes etc.) e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais (como o remanejamento e a distribuição de plantações, entre outros), com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT308)** Aplicar as relações métricas, incluindo as leis do seno e do cosseno ou as noções de congruência e semelhança, para resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos, em variados contextos. **(EM13MAT309)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Competências específicas	Habilidades
	(EM13MAT310) Resolver e elaborar problemas de contagem envolvendo agrupamentos ordenáveis ou não de elementos, por meio dos princípios multiplicativo e aditivo, recorrendo a estratégias diversas, como o diagrama de árvore. **(EM13MAT311)** Identificar e descrever o espaço amostral de eventos aleatórios, realizando contagem das possibilidades, para resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo da probabilidade. **(EM13MAT312)** Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de probabilidade de eventos em experimentos aleatórios sucessivos. **(EM13MAT313)** Utilizar, quando necessário, a notação científica para expressar uma medida, compreendendo as noções de algarismos significativos e algarismos duvidosos, e reconhecendo que toda medida é inevitavelmente acompanhada de erro. **(EM13MAT314)** Resolver e elaborar problemas que envolvem grandezas determinadas pela razão ou pelo produto de outras (velocidade, densidade demográfica, energia elétrica etc.). **(EM13MAT315)** Investigar e registrar, por meio de um fluxograma, quando possível, um algoritmo que resolve um problema. **(EM13MAT316)** Resolver e elaborar problemas, em diferentes contextos, que envolvem cálculo e interpretação das medidas de tendência central (média, moda, mediana) e das medidas de dispersão (amplitude, variância e desvio padrão).
Competência específica 4 Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.	**(EM13MAT401)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais o comportamento é proporcional, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica. **(EM13MAT402)** Converter representações algébricas de funções polinomiais de 2º grau em representações geométricas no plano cartesiano, distinguindo os casos nos quais uma variável for diretamente proporcional ao quadrado da outra, recorrendo ou não a *softwares* ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica, entre outros materiais. **(EM13MAT403)** Analisar e estabelecer relações, com ou sem apoio de tecnologias digitais, entre as representações de funções exponencial e logarítmica expressas em tabelas e em plano cartesiano, para identificar as características fundamentais (domínio, imagem, crescimento) de cada função. **(EM13MAT404)** Analisar funções definidas por uma ou mais sentenças (tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica, identificando domínios de validade, imagem, crescimento e decrescimento, e convertendo essas representações de uma para outra, com ou sem apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT405)** Utilizar conceitos iniciais de uma linguagem de programação na implementação de algoritmos escritos em linguagem corrente e/ou matemática. **(EM13MAT406)** Construir e interpretar tabelas e gráficos de frequências com base em dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas, incluindo ou não o uso de *softwares* que inter-relacionem estatística, geometria e álgebra. **(EM13MAT407)** Interpretar e comparar conjuntos de dados estatísticos por meio de diferentes diagramas e gráficos (histograma, de caixa (*box-plot*), de ramos e folhas, entre outros), reconhecendo os mais eficientes para sua análise.

Competências específicas	Habilidades
Competência específica 5 Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.	**(EM13MAT501)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 1º grau. **(EM13MAT502)** Investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$. **(EM13MAT503)** Investigar pontos de máximo ou de mínimo de funções quadráticas em contextos envolvendo superfícies, Matemática Financeira ou Cinemática, entre outros, com apoio de tecnologias digitais. **(EM13MAT504)** Investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras. **(EM13MAT505)** Resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica, para conjecturar a respeito dos tipos ou composição de polígonos que podem ser utilizados em ladrilhamento, generalizando padrões observados. **(EM13MAT506)** Representar graficamente a variação da área e do perímetro de um polígono regular quando os comprimentos de seus lados variam, analisando e classificando as funções envolvidas. **(EM13MAT507)** Identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT508)** Identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas. **(EM13MAT509)** Investigar a deformação de ângulos e áreas provocada pelas diferentes projeções usadas em cartografia (como a cilíndrica e a cônica), com ou sem suporte de tecnologia digital. **(EM13MAT510)** Investigar conjuntos de dados relativos ao comportamento de duas variáveis numéricas, usando ou não tecnologias da informação, e, quando apropriado, levar em conta a variação e utilizar uma reta para descrever a relação observada. **(EM13MAT511)** Reconhecer a existência de diferentes tipos de espaços amostrais, discretos ou não, e de eventos, equiprováveis ou não, e investigar implicações no cálculo de probabilidades.

Nesta Coleção, as oportunidades de reconhecer a presença da Matemática em situações reais e em outras áreas do conhecimento se dão em vários momentos como na **Abertura** de cada Capítulo, nas seções **Atividades resolvidas** e **Atividades**, bem como na seção **Conexões**, entre outras. Esses são os elementos que dão suporte ao professor para propor aos estudantes os trabalhos em grupos colaborativos em diferentes situações de investigação.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Metodologias ativas

Todos temos consciência de que a educação formal não acontece apenas no espaço físico da sala de aula e, atualmente, considerando as possibilidades de uso das tecnologias que promovem uma integração de diferentes espaços e tempos, esse fato se tornou mais evidente. Dessa forma, é necessário fornecer aos estudantes possibilidades de aprendizagem que rompam com sua atitude passiva e ultrapassem o espaço físico da sala de aula.

Se queremos que os estudantes sejam proativos, precisamos adotar metodologias em que eles se envolvam em atividades cada vez mais complexas, em que tenham de tomar decisões e avaliar os resultados, com apoio de materiais relevantes. Se queremos que sejam criativos, eles precisam experimentar inúmeras novas possibilidades de mostrar sua iniciativa (MORÁN, 2015).

Segundo Morán (2015), os estudantes devem ser mobilizados por meio de desafios e atividades bem planejadas e avaliadas por meio de acompanhamento do professor. Tais desafios contribuem para mobilizar competências intelectuais, emocionais, pessoais e de comunicação.

Ainda segundo o mesmo autor, as metodologias ativas são o ponto de partida para processos de reflexão, de integração cognitiva e de generalização. Desafios e atividades propostos devem ser do tipo investigativo que exigem aprender pela descoberta por meio de pesquisas, análise de situações, identificação de diferentes aspectos envolvidos, reconhecendo regularidades, fazendo escolhas e validando suas conclusões. As metodologias ativas mais aplicadas são a aprendizagem por projetos, por resolução de problemas, sala de aula invertida e rotação por estações.

Na **metodologia por projetos,** os estudantes são motivados a trabalhar de forma colaborativa em propostas interdisciplinares nas quais se abordam conceitos-chave dos objetos de conhecimento envolvidos. As aprendizagens são vinculadas a experiências e interesses deles, o que implica em um questionamento constante e na reconstrução de certezas. Os conteúdos surgem de acordo com o desenvolvimento da pesquisa e são explorados de modo mais profundo do que se tivessem sido determinados anteriormente. O ponto de partida deve ser a definição de uma questão central, que irá determinar o que investigar. A seguir, um conjunto de certezas provisórias e dúvidas temporárias estarão presentes ao longo da pesquisa, podendo também o professor prever a amplitude do projeto a partir dos conhecimentos prévios que os estudantes apresentam. A busca de informação na internet, em livros, revistas, entrevistas vai requerer a elaboração de registros importantes para o processo em desenvolvimento e para a socialização de ideias.

A **metodologia de resolução de problemas** propõe uma abordagem em que a construção do conhecimento se faz a partir de problemas geradores, propostos como ponto de partida para o ensino de conceitos e conteúdos matemáticos. O problema matemático é apresentado antes de se iniciar o conteúdo, e o estudante, ao resolvê-lo, construirá um conceito que ainda não conhece. Segundo Huanca e Onuchic (2011), pesquisadores citados por Melo e Justulin (2019), nessa metodologia "os professores, através e durante a resolução dos problemas, devem fazer conexões entre diferentes ramos da Matemática, gerando novos conceitos e novos conteúdos". Eles indicam que as atividades podem ser organizadas em dez etapas:

(1) proposição do problema,
(2) leitura individual,
(3) leitura em conjunto,
(4) resolução do problema,
(5) observar e incentivar,
(6) registro das soluções na lousa,
(7) plenária,
(8) busca do consenso,
(9) formalização do conteúdo, e
(10) proposição e resolução de novos problemas.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Se surgirem dúvidas, o professor poderá auxiliar, porém as ações são exclusivamente dos estudantes; ele age como observador e incentivador, estimulando o trabalho em grupo, incentivando a reflexão e a troca de ideias entre eles. Depois de os grupos concluírem suas resoluções, um representante é convidado a registrar na lousa a sua resolução, esteja certa ou errada. Diante das respostas, os estudantes são convidados a refletir e discutir os diferentes métodos utilizados na solução. Depois desse momento, o professor busca, com toda a turma, chegar a um consenso sobre o resultado obtido. Ao final das discussões, o professor formaliza o conteúdo matemático do qual emergiu o problema gerador, institucionaliza os conceitos, destaca diferentes formas operatórias e/ou demonstra propriedades específicas sobre o assunto. É importante que sejam propostos novos problemas relacionados ao conteúdo que foi formalizado, para a familiarização com o novo conhecimento e reconhecimento de sua aplicação a diferentes contextos.

A **sala de aula invertida** se caracteriza por inverter o ciclo típico das aulas, no qual o professor apresenta o conteúdo e este é aplicado. Nessa metodologia, os estudantes devem ter contato antecipado com o conhecimento necessário antes da aula, para que, no ambiente da sala de aula possam interagir de forma ativa para esclarecer, trabalhar e aplicar o conhecimento com o qual tiveram contato. Embora muitas pesquisas apontem resultados positivos sobre o emprego dessa metodologia, há também pesquisadores que apresentam críticas sobre ela. Segundo Valente (2014), citado por Honório (2016), alguns críticos destacam a dependência que esse modelo tem da tecnologia, o que pode criar um ambiente de aprendizagem desigual, tanto em termos do acesso à tecnologia quanto à motivação para os estudos independentes. Outra crítica é a de o estudante vir para a sala de aula sem se preparar e, com isso, não ter condições de acompanhar as discussões ou prejudicar as interações possíveis. No entanto, essas críticas são rebatidas, apoiadas justamente nessas interações entre os participantes do processo colaborativo, que tem como paradigma o predomínio da comunicação, da coordenação e da cooperação e, por isso, as aprendizagens podem ocorrer. Nesse modelo, o professor disponibiliza materiais, normalmente em ambiente virtual (videoaula, tutorial, textos e questões) de acordo com seu planejamento de trabalho e, na sala de aula, dará o *feedback* de modo a esclarecer dúvidas e corrigir erros, pois agora seu papel é amparar e não mais transmitir informações.

Na **metodologia de rotação por estações de aprendizagem**, os estudantes são divididos em pequenos grupos, que participarão de algumas estações de trabalho, sendo recomendado que, em pelo menos uma delas, a proposta envolva o uso de ambiente virtual. Essas estações podem estar alocadas em diferentes ambientes da escola. Os grupos executam um rodízio por essas estações, cada uma com uma atividade que se comunica com o objetivo central da aula. As estações precisam ser planejadas de forma que sejam independentes, sem exigência de algum pré-requisito ou exercício prévio, levando em consideração que cada grupo iniciará as atividades em uma estação diferente. Desse modo, o professor necessita ocupar-se de diferentes ações que cercam o planejamento das estações: definir quantas, quais serão e qual deve ser a quantidade de estudantes em cada estação; organizar o(s) espaço(s); delimitar o tempo necessário para cada estação e qual será o tempo limite para a mudança de estação de trabalho; pensar nos recursos didáticos necessários para cada estação. As propostas em cada estação podem variar abrangendo tarefas de leitura, escrita, produção, discussão, exercícios, atividades em plataformas virtuais, atividades envolvendo aplicativos e recursos tecnológicos, podendo, por exemplo, haver uma estação com o professor, uma na qual se realizem atividades individualizadas e uma com computadores para o desenvolvimento da atividade *on-line*.

A escolha de qual metodologia utilizar e para qual ou quais assuntos elas poderão ser aplicadas cabe ao professor. O livro didático não determina o emprego de uma ou outra metodologia, ele apenas oferece suporte para a estruturação e desenvolvimento dos

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

objetos de conhecimento matemático a serem explorados e sistematizados pelos estudantes do Ensino Médio.

Atividades investigativas precisam estar presentes em qualquer das metodologias ativas que se queira aplicar em sala de aula, sejam elas de resolução de problemas, baseadas em projetos, sala de aula invertida, rodízio por estações etc.

Para exemplificar como utilizar os recursos fornecidos pelo livro didático para a elaboração e o desenvolvimento de propostas de atividades investigativas, vamos considerar o trecho da introdução de um capítulo desta Coleção que propõe o estudo de função quadrática:

> Situações envolvendo trajetórias parabólicas, como lançamentos de projéteis, podem ser modeladas por meio de funções quadráticas, assim como certos tipos de movimentos estudados pela Física. Além disso, alguns objetos, como antenas parabólicas e faróis de veículos, são construídos utilizando propriedades da parábola, a curva que representa o gráfico de funções quadráticas.

Nesse parágrafo, podemos destacar os seguintes temas que podem gerar investigações a serem realizadas:

- lançamento de projéteis;
- movimentos em Física;
- construção de antenas parabólicas e faróis.

Considerando que, no Ensino Fundamental, os estudantes já podem ter tido contato com as funções quadráticas, como expresso pelas habilidades:

> (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$.
>
> [...]
>
> (EF09MA06) Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis.
>
> (EF09MA09) Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (BNCC, 2018, p. 313-317).

Uma proposta investigativa envolvendo esse tema – funções quadráticas – é essencial para a consolidação da aprendizagem construída, ampliação dos conhecimentos e identificação das possibilidades de sua aplicação em diferentes contextos, como propõe a BNCC.

Partindo, então, desses pressupostos é possível elaborar um planejamento para a efetivação de uma atividade investigativa. As competências e habilidades, cujo desenvolvimento será promovido, estão listadas no início do Capítulo e são elas que balizarão a sua mediação, dando suporte às suas intervenções no desenrolar do trabalho realizado pelos estudantes. Porém, em atividades investigativas, os estudantes percorrem diferentes caminhos e, levando em consideração que farão explorações sobre a função quadrática, certamente outras habilidades poderão ser mobilizadas, consolidadas ou desenvolvidas, como as que são referentes a números e grandezas e medidas. Analise quais foram os caminhos percorridos pelos estudantes para destacar também as habilidades desses objetos de conhecimento.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

O ponto de partida consiste em mobilizar a turma para a realização da atividade investigativa, nesse caso específico, a partir da proposta da leitura do texto inicial do Capítulo 3 deste Volume e sua introdução, e do seguinte questionamento:

- Vocês conseguem imaginar como e por que situações como o lançamento de projéteis, movimentos estudados pela Física, e a construção de antenas parabólicas e faróis estão ligados às funções quadráticas?

As respostas dos estudantes já fornecem dados para o levantamento inicial do conhecimento prévio que eles têm sobre o assunto. Outras questões podem ser propostas:

- Será que essas são as únicas situações em que essas funções se aplicam?

Essas são as questões que vamos tentar responder, mas vamos nos dividir em grupos de modo que cada um vá em busca de algumas respostas, para, ao final, juntarmos as partes para uma conclusão geral da classe.

A formação dos grupos para atividades investigativas, como já destacado anteriormente, é determinada pelo professor, levando em conta as possibilidades de participação e contribuição de cada um no grupo. Deve-se procurar evitar formações nas quais alguns estudantes fazem e outros esperam as respostas, além de buscar a constituição de grupos colaborativos de até quatro integrantes. Essa montagem pode ser feita quando da apresentação da proposta à classe.

Feita a organização dos grupos, apresentar a todos as partes das questões iniciais a serem respondidas, para que cada grupo decida sobre qual questão trabalhará, porém verificar que todas sejam respondidas pela turma.

- Por que o lançamento de projéteis está ligado às funções quadráticas e como elas se aplicam?
- Quais dos movimentos estudados pela Física são modelados pela função quadrática? Como usá-la para resolver problemas de Física?
- O que a construção de antenas parabólicas e faróis tem a ver com as funções quadráticas? Como empregá-las nessas construções?
- Há outras aplicações da função quadrática nas diversas áreas de conhecimento? Quais são e como são aplicadas?

Como fonte de consulta, os estudantes poderão utilizar os próprios livros didáticos de todas as áreas, outros livros da biblioteca da escola e a internet. No caso do livro de Matemática, eles poderão apoiar-se nas atividades resolvidas e apresentar exemplos de aplicação retirados das demais atividades. Durante todo o processo, eles devem documentar suas descobertas, tanto por meio de relatórios, como por fotos e/ou vídeos de modo que, quando encerrarem as investigações, possam compilar essa documentação para a apresentação à classe. Se achar interessante, pode também sugerir que façam registros em seu portfólio.

O acompanhamento dos trabalhos dos estudantes e a intervenção do professor em cada grupo é essencial para conhecer as dificuldades presentes com objetivo de atuar sobre elas. É, também, por esse acompanhamento que será possível perceber se há alguma dificuldade comum a todos na sala, o que pode requerer uma abertura da discussão com todos os grupos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Atividades desse tipo demandam mais do que uma aula para serem realizadas, sendo o professor, pelo seu acompanhamento das discussões e preparação dos estudantes para a apresentação de suas descobertas à classe, quem determinará o momento em que as equipes devem encerrar esta etapa de trabalho.

Em seguida, cada grupo deve apresentar à sala suas descobertas, validando-as com argumentações consistentes. Pesquisas indicam que ao ser solicitado a explicar, elaborar ou defender seu posicionamento perante outros, o indivíduo constrói para si uma maior estrutura de compreensão sobre o que está abordando. Dessa forma, cabe ao professor incentivar essa prática ao comentar e explicitar os raciocínios desenvolvidos usando, essencialmente, três fases dos processos argumentativos: a **formulação de ideias**, a **explicação e justificação dos procedimentos** e os **algoritmos utilizados**. Para orientar o suporte que deve ser dado aos estudantes para a constituição de seus processos argumentativos e para a observação pelo professor do desenvolvimento desse processo, foi criado, por pesquisadores[3], o quadro a seguir.

> **Quadro 1: Avaliação da Argumentação Científica dentro da Sala de Aula (AACS)**

Aspectos conceituais e cognitivos	Aspectos epistêmicos	Aspectos sociais
1. A conversa centrou-se na geração ou validação de alegações ou explicações.	**8.** Os participantes invocaram as "ferramentas da retórica" para apoiar ou contestar ideias.	**15.** Os participantes foram reflexivos sobre *o que* e *como* conhecem.
2. Os participantes procuram e discutem conclusões e explicações alternativas.	**9.** Os participantes usaram evidências para apoiar e desafiar as ideias ou dar sentido ao fenômeno sob investigação.	**16.** Os participantes respeitam o que o outro tem a dizer.
3. Os participantes modificaram sua conclusão ou explicação quando notaram uma inconsistência ou descobriram informações anômalas.	**10.** Os participantes examinaram a relevância, a coerência e a suficiência das provas.	**17.** Os participantes discutiram uma ideia quando ela foi introduzida na conversa.
4. Os participantes estavam céticos sobre ideias e informações.	**11.** Os participantes avaliaram a forma como os dados disponíveis foram interpretados ou o método usado para coletar os dados.	**18.** Os participantes encorajaram ou convidam outros para compartilhar ou criticar ideias.
5. Os participantes forneceram razões enquanto apoiavam ou contestavam uma ideia.	**12.** Os participantes usaram as teorias científicas, leis ou modelos para apoiar e desafiar ideias ou para ajudar a atribuir sentido ao fenômeno sob investigação.	**19.** Os participantes reafirmam ou sumarizam comentários e perguntavam uns aos outros para esclarecer ou detalhar seus comentários.
6. Os participantes basearam as suas decisões ou ideias sobre estratégias de raciocínio inadequadas.	**13.** Os participantes fizeram distinções e conexões entre inferências e observações explícitas por outros.	
7. Os participantes tentaram avaliar os méritos de cada explicação ou alegação alternativa de forma sistemática.	**14.** Os participantes usam a linguagem científica para comunicar ideias.	

[3] Ferramenta denominada Assessment of Scientific Argumentation in the Classroom (ASAC) criada por SAMPSON, V. *et al.*, 2012, *apud* CARMO, A. B. **Argumentação matemática em aulas investigativas de física**. USP, 2015. Disponível em: https://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48134/tde-12052015-135710/publico/ALEX_BELLUCCO_DO_CARMO.pdf. Acesso em: 1º jul. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Após cada apresentação, o professor faz sua validação e complementa, se necessário, a justificativa final. Terminada a apresentação de todos os grupos, as perguntas iniciais devem ser retomadas e a classe deve ser questionada no sentido de avaliar se o conjunto das apresentações foi suficiente para respondê-las, solicitando, então, a todos a elaboração de uma síntese do que foi exposto, que pode ser tomado como mais um instrumento de avaliação.

A partir daí, todos poderão passar à resolução das atividades propostas no livro e indicadas pelo professor, para que ocorra a familiarização do conhecimento construído durante a vivência da atividade investigativa. Para resolver essas atividades, podem ser formados outros grupos, porém sempre grupos colaborativos, e os problemas propostos devem abordar diferentes contextos e diferentes aplicações, tanto externas à Matemática como internas a ela.

O exemplo de atividade investigativa sobre funções quadráticas, descrito anteriormente, pode ser adaptado para os diferentes conteúdos de cada um dos Volumes. Em todos os Capítulos, existe a possibilidade de criar esse tipo de atividade a partir da abertura, da introdução, ou de outras seções que sempre propõem elementos interessantes, tendo como suporte o próprio livro didático.

O papel do professor

Aulas de investigação podem representar um desafio à prática do professor, pois elas demandam um equilíbrio entre garantir que o trabalho dos estudantes ocorra e seja significativo do ponto de vista do conhecimento matemático e conceder a eles a autonomia necessária para possibilitar a autoria da investigação.

Considerando esse equilíbrio, o professor precisa interagir com os estudantes para estar ciente de suas necessidades e características particulares, sem perder de vista os aspectos gerais da gestão da situação didática. Desse modo, o professor é levado a desempenhar diversos papéis no decorrer de uma atividade de investigação.

Criar o cenário e desafiar os estudantes: O sucesso de uma investigação depende do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula, de modo que o estudante se sinta à vontade e lhe seja dado tempo para pensar, colocar questões, explorar suas ideias e exprimi-las. Dependendo da situação proposta, é preciso disponibilizar aos estudantes materiais diversos para manipulação ou consulta, sendo o livro didático o ponto de partida essencial para as suas buscas e pesquisas.

Ao propor uma atividade, é fundamental garantir que todos os estudantes entendam o sentido da tarefa proposta, aquilo que se espera deles no decurso da aula, levando-os a compreenderem o que significa investigar e aprender a fazê-lo. A proposta inicial da tarefa não pode ser demasiadamente pormenorizada sobre o que é para ser feito, uma vez que a interpretação pelo estudante sobre o que se propõe é um dos objetivos dessas aulas, esperando-se que ele evolua para realizá-la autonomamente.

O professor precisa dar uma atenção especial à própria tarefa docente, escolhendo questões ou situações iniciais e no decorrer da atividade que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio aos estudantes.

Acompanhar o progresso dos estudantes: Uma vez que os estudantes já estejam em processo de investigação, cabe ao professor manter uma posição de retaguarda, procurando compreender como eles estão pensando, fazendo algumas questões ou solicitando explicações.

É um desafio para o professor perceber aonde os estudantes querem chegar, uma vez que ele pode não ter acompanhado todo o processo de discussão dentro do grupo. Aqui o professor deve considerar que os estudantes podem ainda não ter os registros organizados e sua comunicação matemática oral é limitada e contém erros, precisando, assim, se

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

esforçar para compreendê-los e evitando corrigir cada afirmação ou conceito matemático apresentado de forma imprecisa.

Acompanhar o progresso dos estudantes possibilita ao professor sinalizar que eles podem continuar por estarem indo na direção correta ou intervir, de acordo com a necessidade do grupo, ou ainda fornecendo apoio mais direto para influenciar positivamente o trabalho deles.

A avaliação do desenvolvimento dos estudantes durante a atividade pode também levar o professor a decidir por conceder mais tempo para a investigação, ou a fazer uma pequena discussão intermediária com toda a turma, ou passar à discussão final.

Apoiar o trabalho dos estudantes: Na condução da aula, o apoio a ser dado precisa estar pautado na manutenção dos aspectos característicos do processo investigativo. Assim, a intervenção do professor pode assumir várias formas como colocar questões, fornecer ou recordar informações relevantes, fazer sínteses e promover a reflexão por parte dos estudantes.

A postura interrogativa é a que o professor deve privilegiar e suas questões podem ter diferentes intenções, como a de esclarecer ideias, suas e dos jovens, refazer uma questão proposta por um estudante para que ele pense melhor sobre a sua dúvida, ou a de transformar uma questão em uma sugestão orientadora para a atividade.

Essa postura tem, também, a função de ajudar os estudantes a compreender que o papel principal do professor é apoiá-los em seu trabalho e não simplesmente dizer se estão certos ou não, o que, aliás, deve ocorrer cada vez menos nessas aulas.

Em alguns momentos, a atividade investigativa pode sofrer bloqueio porque os estudantes não compreendem certos conceitos ou representações importantes para a sua continuidade. A intervenção do professor nesses momentos precisa ser a de fornecer ou recordar conceitos anteriormente estudados para que os estudantes possam dar continuidade a sua tarefa.

Outra prática importante por parte do professor é a de promover a reflexão dos estudantes sobre o trabalho realizado e ajudá-los a fazer uma síntese da atividade, descrevendo avanços e recuos, os objetivos que tinham em mente e as estratégias que seguiram.

Raciocinar matematicamente: Em atividades de investigação, é natural que os estudantes apresentem questões ou conjecturas que o professor não havia pensado antes. É preciso avaliar rapidamente se será apropriado parar para pensar junto com os estudantes ou deixar para um momento posterior.

Construir o raciocínio matemático junto com os estudantes pode ser interessante, pois é uma oportunidade de acompanharem o desenvolvimento da ideia, enquanto o professor pensa em voz alta, colocando a questão debatida em termos matemáticos e buscando a sua justificativa.

Tudo o que foi exposto até este ponto deixa claro que em toda atividade de investigação devem ser dados um tempo e uma oportunidade aos estudantes para que possam organizar e desenvolver seus modos de pensar, expressá-los para os colegas e para o professor e registrá-los utilizando linguagem matemática adequada. Desse modo, será possível a todos reconhecer o valor dos processos matemáticos, adquirir confiança em sua capacidade de fazer Matemática e, finalmente, tornar-se aptos a resolver problemas.

No entanto, isso não quer dizer que as atividades matemáticas a serem propostas se restrinjam apenas às investigativas. Depois de propor problemas de investigação, o professor deve abordar problemas de familiarização com o novo conhecimento apresentando diferentes domínios matemáticos e contextos.

Os contextos podem variar entre propostas envolvendo aspectos da história da Matemática, explorações de situações envolvendo a Etnomatemática, e, como os jovens estão conectados o tempo todo – inclusive durante as aulas –, atividades envolvendo as Tecnologias da Informação e Comunicação são potencialmente ricas nesse processo.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Pensamento computacional

O desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado no Ensino Fundamental, pode ser aprofundado nesta etapa da escolaridade. A BNCC aponta que esse tipo de pensamento

> [...] envolve as capacidades de compreender, analisar, definir, modelar, resolver, comparar e automatizar problemas e suas soluções, de forma metódica e sistemática, por meio do desenvolvimento de algoritmos (BNCC, 2018, p. 474).

Desse modo, ele pode ser entendido como um processo de formulação e resolução de problemas cujas soluções são representadas por meio de passos claros, de tal forma que uma pessoa ou uma máquina possam executá-los eficazmente. Esse processo envolve ações de pensamento que tratam da decomposição do problema em etapas, do reconhecimento de padrões e suas repetições, da abstração e generalização que permite a construção de algoritmos e, por fim, da avaliação da solução.

Para auxiliar os estudantes a desenvolver seu pensamento computacional, é necessário orientá-los para que empreguem estas quatro ações no momento da resolução de problemas:

- **ponto de partida**: decomposição do problema em partes, dividindo-o em problemas menores e mais fáceis de manejar. Tal ação, além de tornar todo o processo de solução mais explícito, facilita a detecção de erros pelo caminho.
- **reconhecimento de padrões**: essa ação é composta de dois momentos, um primeiro em que se deve buscar características e/ou propriedades que sejam comuns às várias partes do problema decomposto e que podem ser replicadas em cada uma delas. No segundo momento, deve ocorrer uma busca de soluções já utilizadas anteriormente que possam ser empregadas no problema atual, mesmo que com adaptações. Esse segundo momento é o passo necessário para a próxima ação.
- **abstração e generalização**: trata-se de identificar, em uma situação, quais elementos não são relevantes reduzindo, assim, o foco de atenção aos detalhes substanciais para a resolução do problema. Nesse movimento, é possível detectar características/propriedades comuns a um conjunto de dados e identificar, por generalização, quais procedimentos ou algoritmos poderão ser adotados e, por fim, escrever o algoritmo. Reconhecer tipos de estruturas que podem ser reaplicadas faz os problemas se tornarem mais simples.
- **avaliação**: ela ocorre a todo momento, desde que se toma conhecimento sobre o problema a resolver até se chegar ao algoritmo que o resolve. É necessário que, em cada uma das ações, aspectos como eficácia, consumo de recursos, rapidez, facilidade, abrangência da solução, entre outros sejam analisados para que se tenha, ao final, um resultado mais robusto e confiável. Outra característica da avaliação é a de manter controle sobre as necessidades e propósitos das estratégias adotadas para prevenir que pequenos erros de percurso não se tornem grandes complicações ao final.

Muitos dos problemas discutidos em sala de aula podem ser analisados sob esse ponto de vista, sendo recomendado propor aos estudantes que representem as soluções por meio de fluxogramas que descrevam o processo de solução ou que realizem descrições orais e/ou escritas do passo a passo de suas resoluções.

Por outro lado, é também necessário que, no planejamento de sequências de trabalho e de ações pedagógicas a serem desenvolvidas em sala de aula, sejam consideradas as descobertas recentes, as novas tecnologias e a sua influência no conhecimento científico. Nesse contexto, destaca-se a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos para o ensino e a aprendizagem matemática. Essas explorações devem, na medida do possível, ser feitas também por meio de atividades investigativas. Nesta Coleção, a seção

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Explorando a tecnologia, presente em todos os Volumes, relaciona explorações matemáticas a *softwares* específicos, que atendem ao proposto na BNCC referente à cultura digital

> [...] fluência no uso da tecnologia digital para expressão de soluções e manifestações culturais de forma contextualizada e crítica (BNCC, 2018, p. 474).

Os *softwares* explorados na Coleção são o **GeoGebra**, o **LibreOffice** e o **Scratch**, todos eles gratuitos e com facilidade de acesso *on-line*.

O **GeoGebra** é um *software* específico de Matemática voltado para o estudo de Geometria, Álgebra, Planilha de Cálculo, Gráficos, Probabilidade e Estatística. Ele é conhecido como um *software* de matemática dinâmica por proporcionar movimentações e modificações do objeto matemático construído, permitindo, assim, o desenvolvimento de processos investigativos nas diferentes frentes estudadas, graças à interconexão que possui entre geometria, álgebra e planilha de cálculo. Em todos os Capítulos em que se propõe sua utilização, há uma sugestão de uso com suporte para a exploração pelos estudantes.

O **LibreOffice** também é apresentado nesta Coleção como um recurso gratuito para o uso de planilhas eletrônicas, editor de fórmulas matemáticas e gráficos, além de textos e apresentações. Nos Capítulos em que seu uso é sugerido, há indicações de possibilidades de exploração pelos estudantes, cabendo ao professor mobilizar os processos investigativos por meio de questões que os incentivem a realizar ações de busca para a aprendizagem esperada.

O **Scratch** é um *software* voltado para a programação de animações ou jogos, utilizando imagens e sons disponíveis. Essa programação é feita a partir de blocos com os comandos básicos para a movimentação pretendida do personagem em cena. Seu uso em sala de aula é favorecido por ser extremamente intuitivo e visual com manipulação simples de suas estruturas e construção dos comandos. Esse recurso dá respaldo ao trabalho do desenvolvimento do pensamento computacional, pois favorece a capacidade analítica de antecipação da ação que se espera do personagem, montada por meio de blocos preestabelecidos, passíveis de serem encaixados uns com os outros de acordo com a lógica desejada. Sua aplicação também tem caráter investigativo, uma vez que os resultados podem ser imediatamente testados e observados na tela, de modo a permitir a análise do erro e sua correção a cada etapa construída.

> AVALIAÇÃO

Diante de diferentes propostas metodológicas que podem ser utilizadas pelo professor em sala de aula, é preciso considerar que apenas os processos tradicionais de avaliação não são suficientes para revelar a qualidade das aprendizagens reais dos estudantes e para fornecer essa informação a todos que dela vão fazer uso – gestores, professores, estudantes.

A avaliação é base para tomadas de decisão e, por isso, deve ser considerada como uma ação que está sempre a serviço de desvelar a qualidade da realidade. De acordo com Luckesi (2016), precisamos "ter clareza de que nossos atos avaliativos sempre operam com um único algoritmo metodológico, que se resume em coletar dados da realidade e qualificá-la tendo por base um padrão de qualidade".

Coletar dados da realidade significa considerar a educação integral do estudante, isto é, observá-lo não somente do ponto de vista do desenvolvimento cognitivo, mas também de seu aprimoramento socioemocional, como apontado pela BNCC.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> No novo cenário mundial, reconhecer-se em seu contexto histórico e cultural, comunicar-se, ser criativo, analítico-crítico, participativo, aberto ao novo, colaborativo, resiliente, produtivo e responsável requer muito mais do que o acúmulo de informações. Requer o desenvolvimento de competências para aprender a aprender, saber lidar com a informação cada vez mais disponível, atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais, aplicar conhecimentos para resolver problemas, ter autonomia para tomar decisões, ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções, conviver e aprender com as diferenças e as diversidades (BNCC, 2018, p. 14).

Note que esse parágrafo traz elementos substanciais para a construção de uma pauta de observação para se realizar uma avaliação que de fato possa qualificar a realidade da aprendizagem desenvolvida. Essa pauta de observação deve ser feita pelo professor durante a elaboração de seu planejamento e deve estar sempre presente no decorrer de todo o processo vivido pelo estudante, o que caracteriza uma avaliação processual. Cabe aqui ressaltar que esse processo avaliativo não descarta a verificação das aprendizagens específicas de cada objeto de conhecimento trabalhado, que, normalmente, estão presentes nas avaliações externas como Saeb, Enem, vestibulares, que também são abordadas nos Volumes desta Coleção.

Embora para cada um dos componentes curriculares seja preciso eleger as habilidades específicas, uma pauta de observação pode ter a seguinte configuração:

Aplicar conhecimentos para resolver problemas			
Habilidades específicas	**Qualidade**		
Identificar uma ...			
Realizar transformações entre ...			
Realizar cálculos envolvendo números...			
Determinar ... e reconhecer que ...			
Resolver problemas que envolvam ... validando estratégias e resultados			
Identificar regularidades e padrões em ...			
Identificar e utilizar diferentes formas e propriedades ...			
Reconhecer que os valores obtidos são ...			
Construir argumentos consistentes para explicar ...			
Analisar os elementos obtidos e produzir a comunicação de suas conclusões a serem apresentadas tanto oralmente como por escrito.			
Habilidades socioemocionais			
Utilizar as informações disponíveis de modo ético.			
Atuar com discernimento e responsabilidade nos contextos das culturas digitais.			
Ter autonomia para tomar decisões.			
Ser proativo para identificar os dados de uma situação e buscar soluções.			
Conviver e aprender com as diferenças e as diversidades.			

No registro da qualidade observada, pode-se dar valores, por exemplo, de 0 a 2:

- 0 – a ser desenvolvida, requer investimento do professor e do estudante.
- 1 – em desenvolvimento, apresenta instabilidade e requer intervenções de suporte por parte do professor.
- 2 – desenvolvida e consolidada.

Essa pauta de observação deve ser ainda apoiada pelo quadro de acompanhamento da construção dos processos argumentativos pelos estudantes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Outro aspecto da avaliação a ser tratado é o da autoavaliação, que contribui para estimular o estudante a tomar consciência de seu próprio percurso de aprendizagem e se responsabilizar pelo seu empenho em avançar.

Nessa perspectiva, entende-se que a autoavaliação é um componente importante ao ser utilizada como um instrumento da avaliação formativa, pois auxilia os estudantes a adquirirem uma capacidade cada vez maior de analisar suas próprias responsabilidades, atitudes, comportamento, pontos fortes e fracos, sua condição de aprendizagem e suas necessidades para atingir os objetivos. Com o exercício constante da autoavaliação, os estudantes serão capazes de desenvolver sentimentos de responsabilidade pessoal e de apreciação da força dos empenhos individuais e de grupo. Além disso, aprendem a encarar prontamente as capacidades em várias empreitadas e a afinar suas potencialidades e contribuições, além de desenvolver a capacidade de análise contínua na qual leva em conta o que já aprendeu, o que ainda não aprendeu, os aspectos facilitadores e os dificultadores do seu trabalho, conseguindo planejar suas ações. Além disso, a autoavaliação também incentiva os jovens a pensar sobre si mesmos e os conduz a uma modalidade de apreciação que se pratica durante a vida inteira e os ajuda a avançar em sua autonomia.

A autoavaliação também deve ser orientada pelo professor por meio de questões que estimulem os estudantes a refletir sobre suas ações durante a realização das atividades. No quadro a seguir, há exemplos de questões para esse fim.

AUTOAVALIAÇÃO	
1.	Entre os assuntos abordados, qual você considerou mais interessante? E o menos interessante? Explique suas escolhas.
2.	Comparando o trabalho de seu grupo com os dos outros, como você avalia a produção de vocês?
3.	Considerando a avaliação feita anteriormente, você acha que a produção do seu grupo poderia ter sido melhor? Em qual(is) aspecto(s)?
4.	Como você avalia a participação de cada um dos integrantes de seu grupo para a realização do trabalho? Como você se classifica dentro do seu grupo de trabalho: colaborativo(a), proativo(a), coordenador(a), inovador(a), organizador(a)?
5.	As discordâncias entre você e seus colegas de grupo ocorreram de modo a chegarem a um consenso, com respeito pelas ideias do outro e a construção de argumentação consistente, proposta com cordialidade? Dê um exemplo.
6.	Você e seu grupo criaram estratégias para evitar distrações e manter a concentração, o esforço e a motivação durante a realização das tarefas? Dê um exemplo.
7.	Durante as apresentações dos vários grupos, você se manteve envolvido e participante das discussões? O que você aprendeu que não sabia?
8.	Quais conhecimentos matemáticos você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
9.	Quais conhecimentos de outras áreas você adquiriu com a elaboração desse trabalho?
10.	Em que medida a seção **Para refletir** contribuiu para a análise de sua aprendizagem em cada um dos Capítulos que compuseram os temas desse período?

Volumes da obra

Esta Coleção é formada por seis Volumes, sendo cada um constituído por um conjunto de objetos de conhecimento que estão integrados dentro da própria Matemática. Além disso, apresentam também situações cuja contextualização evidencia os modelos matemáticos que representam fatos e fenômenos de outras áreas de conhecimento e presentes no cotidiano.

Tal estruturação pode ser observada em todos os Volumes da Coleção, uma vez que essas integrações são destacadas em várias das seções que compõem os Capítulos – **Abertura**, **Conexões**, **História da Matemática**, além de destaques sobre alguns aspectos do conhecimento matemático, que embasam reflexões sobre temas transversais e aspectos

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

curiosos de sua presença na vida e no desenvolvimento humano, apontados nos boxes **Fórum**, **Saiba que...** e **Pense e responda**.

Essa estruturação permite que os Volumes possam ser utilizados nas diferentes séries do Ensino Médio, de acordo com a proposta curricular que embasa o planejamento do professor e da sua escola, e com a distribuição da carga horária destinada à formação geral e aos itinerários formativos.

Outro aspecto a ser destacado é que como o mais indicado ao desenvolvimento das propostas é que sejam feitas de modo investigativo, não se considera como requisito de trabalho o conhecimento prévio dos estudantes. Consideramos que se não houver por parte dos estudantes algum conhecimento necessário para o desenvolvimento da atividade proposta, essa ausência de conhecimento passa também a ser um aspecto da investigação. Essa condição é também significativa para a flexibilidade de uso dos livros que compõem esta Coleção. O professor, ao diagnosticar a ausência de estabilidade no emprego de algum conhecimento requerido na situação proposta, deve indicar aos estudantes a necessidade de buscar apoio em outros materiais disponíveis ou na internet e em aplicativos.

> ESTRUTURA DA OBRA

Esta obra foi elaborada tendo em vista atender à BNCC, contemplando propostas de trabalho que promovam o desenvolvimento das competências gerais, específicas e habilidades presentes nesse documento, sem, no entanto, deixar de lado suas características essenciais de atendimento às expectativas de professores e estudantes do Ensino Médio.

Cada um dos livros que compõem esta Coleção está estruturado com seções e boxes que possibilitam ao professor uma exploração mais dinâmica do material, podendo indicar aos estudantes por qual das propostas iniciar o trabalho.

A **Abertura** de Capítulo sempre apresenta uma contextualização interessante de aplicação do conteúdo que será abordado. Considerando a diversidade possível de uso dos conteúdos matemáticos, ora são apresentadas situações atuais, da história da Matemática, ora sobre alguma profissão, porém sempre tendo em vista o estabelecimento de uma relação entre o que está sendo apresentado e os conteúdos a serem desenvolvidos no Capítulo. O professor poderá usá-la para um levantamento diagnóstico dos conhecimentos prévios que os estudantes já possuem sobre o conteúdo a ser desenvolvido. Além disso, estão também indicadas as habilidades e competências que os assuntos abordados no Capítulo possibilitam desenvolver.

A seção **Atividades resolvidas** tem por princípio a apresentação de uma forma organizada de resolução e de emprego da linguagem matemática. Um aspecto dessa seção a ser considerado e analisado, tanto pelos professores como pelos estudantes, é que há situações nas quais diferentes caminhos são discutidos para se chegar à solução de uma questão, buscando destacar o fato de que não há um único modo de resolução em Matemática e que os estudantes têm liberdade de criar estratégias próprias de resolução.

Com as **Atividades**, busca-se a familiarização dos estudantes com os conteúdos estudados no Capítulo, tanto com problemas envolvendo diferentes contextos do dia a dia como com questões específicas para a sistematização de procedimentos necessários para utilização em diferentes situações. Estão presentes nessa seção questões do Enem ou de vestibulares de instituições de Ensino Superior de todas as regiões do país e outras elaboradas pelos autores para que os estudantes tenham maiores oportunidades de desenvolvimento das competências e habilidades desenvolvidas em cada Capítulo.

A seção **Conexões** explora temas diversos, com foco na interdisciplinaridade, com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. A

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

seção apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, explorando gráficos, infográficos, tabelas etc. que se conectam com o conteúdo tratado no Capítulo. As questões apresentadas nessa seção são principalmente voltadas a atividades investigativas a serem realizadas em duplas ou grupos colaborativos e vão exigir processos reflexivos e/ou tomadas de decisão sobre intervenções na comunidade. Outro aspecto importante dessa seção é o fato de em muitas propostas os estudantes serem convidados a apresentar suas produções aos colegas e ao professor, o que possibilita o desenvolvimento de sua comunicação matemática.

A seção **História da Matemática** aborda fatos históricos ligados à Matemática, a fim de contextualizar o conteúdo abordado no Capítulo e/ou apresentar o desenvolvimento e a evolução de determinada ideia ou teoria, ao longo do tempo. A abordagem histórica é sempre um modo interessante de motivar os estudantes para as possibilidades de criação em Matemática e para destacar aspectos referentes à observação, análise e percepção de regularidades que estão por trás dessas descobertas.

Explorando a tecnologia é uma seção que promove o desenvolvimento e/ou aprofundamento de conhecimentos matemáticos, por meio de explorações de *softwares* livres, propiciando um trabalho interativo com alternativas para investigar possibilidades de resolução e de análise de consequências em uma representação ao se fazer modificações em outra, por exemplo. Para essas discussões, há orientações iniciais de como utilizar o *software* indicado para cada situação, além de indicação de endereço para a realização do *download* e orientações para sua instalação. O pensamento computacional também poderá ser desenvolvido por meio de atividades chamadas de *desplugadas*, por não dependerem de uso do computador, e que colocam em evidência o emprego da lógica de programação.

A seção **Atividades complementares** tem por objetivo apresentar questões do tipo múltipla escolha presentes em exames oficiais como Enem, olimpíadas nacionais e vestibulares realizados em todas as regiões brasileiras, priorizando os mais recentes. Sua presença no livro e as possíveis discussões a serem realizadas pelos professores a partir deles apontam para a necessidade da sistematização de alguns aspectos e procedimentos abordados no Capítulo.

Com a seção **Para refletir,** os estudantes são estimulados a realizar reflexões para identificar possíveis conexões com o que foi estudado no Capítulo e avaliar sua aprendizagem com as ações desenvolvidas no decorrer do trabalho. São ótimas oportunidades para a realização da autoavaliação pelos estudantes.

Além das seções, os Volumes apresentam também boxes que enriquecem as propostas apresentadas e ampliam as possibilidades de os estudantes desenvolverem as competências gerais da BNCC.

No boxe **Fórum** é apresentada uma situação referente a um tema contemporâneo, que possui alguma relação com o conteúdo abordado no Capítulo, seguido de algumas questões, com o intuito de promover debates e/ou trocas e compartilhamento de conhecimentos. Tais ações exigem a mobilização de estratégias de debate e de construção de argumentação coerente para defesa de seu ponto de vista. Além disso, há a possibilidade de ser utilizado em momentos *on-line* por meio de grupos fechados de discussão em *e-mail*, rede social ou aplicativos de troca de mensagens.

O **Pense e responda** é um boxe que traz perguntas curtas e diretas sobre propostas a serem investigadas pelos estudantes, incentivando-os a elaborar hipóteses e buscar sua comprovação ou negação.

O boxe **Saiba que...** tem como função principal fornecer uma dica interessante ou informação relevante a respeito do conteúdo. Pode ser referente à teoria apresentada, a uma determinada forma de resolução de um problema ou, ainda, para implementar o conteúdo apresentado.

Nos boxes **Para ler**, **Para assistir**, **Para acessar** e **Para ouvir**, como o próprio nome indica, são fornecidas sugestões de livros, *links*, filmes, *podcasts* etc. Sua finalidade é a de fornecer um canal confiável com informações complementares a respeito do tópico que está em estudo.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA E COMENTADA

BONOMI, M. C.; LAURO, M. M. **Funções elementares, equações e inequações**: uma abordagem utilizando microcomputador. 1. ed. São Paulo: CAEM-IME/USP, 2001.
- Aborda aspectos sobre o ensino de funções afim e quadrática a partir do uso de *softwares*.

BOYER, C. **História da Matemática**. 4. ed. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 2002.
- O livro aborda fatos e estudos da História da Matemática.

BRASIL. **Lei nº 13.415, de 16 de fevereiro de 2017**. Brasília, DF: Presidência da República, 2017. Disponível em: http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2017/lei/l13415.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Lei que alterou a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional e estabeleceu uma mudança na estrutura do Ensino Médio, ampliando o tempo mínimo do estudante na escola de 800 horas para 1 000 horas anuais (até 2022) e definindo uma nova organização curricular, mais flexível, que contemple a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), conhecida como o Novo Ensino Médio.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, DF, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Documento oficial contendo um conjunto de orientações que norteia a (re)elaboração dos currículos de referência das escolas das redes pública e privada de ensino de todo o Brasil. Traz os conhecimentos essenciais, as competências, habilidades e aprendizagens pretendidas para crianças e jovens em cada etapa da Educação Básica.

BRASIL. Ministério da Educação. **Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica**. Brasília, DF, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=15548-d-c-n-educacao-basica-nova-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 14 ago. 2020.
- As Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) são normas obrigatórias para a Educação Básica e orientaram a elaboração da BNCC. Elas são discutidas, concebidas e fixadas pelo Conselho Nacional de Educação (CNE).

BRASIL. Ministério da Saúde. Secretaria de Atenção à Saúde. **Guia alimentar para a população brasileira**. 2ª ed. Brasília, DF, 2014. Disponível em: https://bvsms.saude.gov.br/bvs/publicacoes/guia_alimentar_populacao_brasileira_2ed.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresenta aspectos sobre os alimentos saudáveis e contribui para a adequação de uma rotina de alimentação saudável.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília, DF, 2019. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/contextualizacao_temas_contemporaneos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Documento explicativo sobre os Temas Contemporâneos Transversais a serem abordados na Educação Básica.

CARRANO, P.; DAYRELL, J. Juventude e Ensino Médio: quem é este aluno que chega à escola. *In*: DAYRELL, J.; CARRANO, P.; MAIA, C. L. **Juventude e Ensino Médio**: sujeitos e currículos em diálogo. Belo Horizonte: Ed. UFMG, 2014. p. 101-133. Disponível em: https://educacaointegral.org.br/wp-content/uploads/2015/01/livro-completo_juventude-e-ensino-medio_2014.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Como o próprio título indica, trata-se de um texto que procura "descrever" o jovem atual.

CARDOSO, M. C.; HORA, D. M. **Competências e habilidades**: alguns desafios para a formação de professores. Disponível em: http://www.histedbr.fe.unicamp.br/acer_histedbr/jornada/jornada11/artigos/7/artigo_simposio_7_713_micheli_ccardoso@yahoo.com.br.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Texto sobre a formação de professores frente às novas demandas educativas no mundo contemporâneo.

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 17. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresenta uma explicação sobre a história de Fibonacci e como ele chegou à sequência de Fibonacci.

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. Campos dos Goytacazes: UENF, 2016.
- O material explora a utilização do *software* **GeoGebra** e de planilhas no estudo das funções exponenciais.

DAMIANI, M. F. Entendendo o trabalho colaborativo em educação e revelando seus benefícios. **Educar**, Curitiba, n. 31, p. 213-230, 2008. Disponível em: https://www.scielo.br/pdf/er/n31/n31a13.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Reflexões sobre o trabalho colaborativo e seu uso em sala de aula.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2007.
- O livro aborda vários fatos e estudos da Matemática cronologicamente.

FAJARDO, R. A. S. **Teoria dos Conjuntos**. IME-USP. São Paulo, 2017. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~fajardo/Conjuntos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Texto produzido para estudantes do curso de graduação, disciplina de Teoria dos Conjuntos. Nele o assunto é abordado de forma acadêmica, possibilitando o aprimoramento do estudo por parte do professor.

HONÓRIO, H. L. G. Sala de aula invertida: uma abordagem colaborativa na aprendizagem de matemática – estudos iniciais. *In*: EBRAPEM, XX. **Artigo** [...]. Paraná, 2016. Disponível em: http://www.ebrapem2016.ufpr.br/wp-content/uploads/2016/04/gd6_Hugo_Hono%CC%81rio.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Reflexões sobre a metodologia ativa de sala de aula invertida a partir de sua aplicação prática.

LIMA, E. L. *et al*. **A Matemática do Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 2016. v. 1.
- Livro que aborda os conceitos de conjuntos, números e funções.

LUCKESI, C. **Tipificação da avaliação em educação**: uma questão epistemológica. Artigo 109, 2016. Disponível em: http://luckesi.blogspot.com.br/. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Nesse artigo, há discussões sobre as adjetivações aplicadas ao ato de avaliar, discutindo como são colocadas de acordo com os momentos de sua execução.

MELO, M. C. P.; JUSTULIN, A. M. A resolução de problemas: uma metodologia ativa na construção do conceito de semelhança de triângulos. *In*: Encontro Paranaense de Educação Matemática, XV. **Anais** [...]. Londrina, 2019. Disponível em: http://www.sbemparana.com.br/eventos/index.php/EPREM/XV_EPREM/paper/viewFile/1019/881. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresentação teórica e prática da metodologia ativa de resolução de problemas.

MONTEIRO, M. S.; CERRI, C. **História dos números complexos**. São Paulo: CAEM – IME-USP, 2011. Disponível em: https://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresenta informações sobre o desenvolvimento dos números complexos ao longo da história.

MORÁN, J. **Mudando a educação com metodologias ativas**. Coleção Mídias Contemporâneas. Convergências Midiáticas, Educação e Cidadania: aproximações jovens. vol. II. Carlos Alberto de Souza e Ofélia Elisa Torres Morales (Org.). PG: Foca Foto-PROEX/UEPG, 2015. Disponível em: https://www.uniavan.edu.br/uploads/arquivo/N62vWDM7yb.pdf. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Discussões do pesquisador brasileiro sobre a importância do trabalho com metodologias ativas no ensino atual.

PONTE, J. P.; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.
- Nessa obra são apresentadas algumas vantagens em se trabalhar com investigações matemáticas em sala de aula, destacando o estabelecimento de conjecturas, reflexões e formalização do conhecimento matemático pelos estudantes.

SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011.
- Explora o trabalho com logaritmos em situações de sala de aula, considerando uma perspectiva histórica.

TARDIF, M. **Saberes docentes e formação profissional**. Petrópolis: Vozes, 2002.
- Nessa obra, o autor discute e qualifica quais são os saberes que servem de base ao ofício de professor.

TENENTE, L. 30% dos domicílios no Brasil não têm acesso à internet; veja números que mostram dificuldades no ensino à distância. **G1**, 26 maio 2020. Disponível em: https://g1.globo.com/educacao/noticia/2020/05/26/66percent-dos-brasileiros-de-9-a-17-anos-nao-acessam-a-internet-em-casa-veja-numeros-que-mostram-dificuldades-no-ensino-a-distancia.ghtml. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Apresenta alguns dos desafios do ensino remoto emergencial, necessário na pandemia, devido à limitação de acesso à internet e de equipamentos adequados para estudo.

UNESCO. **Declaração Mundial sobre Educação para Todos**: satisfação das necessidades básicas de aprendizagem. Jomtien, 1990. Brasília, DF, 1990. Disponível em: https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Documento importante para conhecimento do professor e que foi um dos suportes para a elaboração da BNCC.

WAGNER, E. Por que as antenas são parabólicas? **RPM**, Rio de Janeiro, n. 33. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/33/3.htm. Acesso em: 14 ago. 2020.
- Artigo que apresenta uma reflexão sobre a forma parabólica das antenas.

COMENTÁRIOS E SUGESTÕES DE ABORDAGEM PARA ESTE VOLUME

Os conteúdos propostos e desenvolvidos nesta obra buscam despertar no estudante sua curiosidade intelectual, explorando diversas situações de forma reflexiva e crítica, seja no contexto da própria Matemática, do dia a dia e de outras áreas de conhecimento, interpretando e analisando dados para tomar decisões éticas e socialmente responsáveis. Nesse sentido, espera-se que o estudante reconheça a relação entre o conhecimento matemático e as práticas sociais, inerente à relação do ser humano com o mundo e à necessidade de resolver problemas diversos.

Do ponto de vista didático-pedagógico, os conceitos matemáticos em estudo devem ser bem fundamentados e possibilitar aos estudantes novos saberes que estimulem processos mais elaborados de reflexão e de abstração, dando sustentação ao pensamento que permite formular e resolver problemas, bem como construir de forma autônoma uma visão integrada da Matemática e de outras áreas. Para isso, as situações de aprendizagem devem ser planejadas tendo como perspectiva o protagonismo do estudante para que possa assumir uma postura ativa nos diversos contextos em que a Matemática está presente.

O objetivo deste material é oferecer subsídios para a atividade docente, que assume um papel relevante dentro do complexo processo de ensino e aprendizagem, de forma articulada com as propostas apresentadas no **Livro do estudante**.

Nesta parte das **Orientações para o professor**, são apresentadas algumas estratégias para auxiliar o processo de ensino-aprendizagem de forma a contribuir para o desenvolvimento de competências e habilidades previstas na BNCC. Além disso, há sugestões de atividades complementares e referências de outros materiais atualizados que podem ser utilizados. Vale pontuar que esta não pretende ser a única referência de consulta, ou ainda, apresentar soluções plenas para os desafios enfrentados pelos professores, mas constituir mais uma alternativa para auxiliar a atividade docente e a aprendizagem, contribuindo para otimização do tempo do professor quanto ao planejamento de suas aulas.

Este Volume é organizado em quatro capítulos e destacamos, entre seus objetivos, a oportunidade de propiciar ao estudante um momento em que possa valorizar e utilizar os conhecimentos historicamente construídos pela humanidade para entender a realidade, compreender e fazer uso de diferentes linguagens matemáticas (simbólica, algébrica e gráfica), ampliando as possibilidades de se comunicar, ler e interpretar o mundo, além de construir argumentação consistente, desenvolvendo principalmente as competências gerais **1**, **4** e **7** da BNCC.

No primeiro Capítulo, os estudantes têm a oportunidade de compreender que o modelo matemático utilizado para interpretar e analisar o cálculo do imposto de renda e das faturas de consumo utiliza funções definidas por mais de uma sentença, o que favorece principalmente o desenvolvimento da competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, de modo particular, a habilidade **EM13MAT404**. Além disso, esse estudo possibilita a investigação de dados referentes ao comportamento de duas variáveis numéricas, considerando-se a variação e utilizando-se a representação no plano, permitindo o desenvolvimento da habilidade **EM13MAT510** e, consequentemente, da competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Ao propor a reflexão sobre o processo de contágio de doenças transmitidas por vírus, como é o caso da covid-19, no início do segundo Capítulo, trabalha-se com uma problematização que possibilita ao estudante conhecer-se e cuidar de sua saúde física e emocional, o que favorece o desenvolvimento da competência geral **8** da BNCC. Além disso, ao identificar e relacionar o processo de contágio dessa doença, além de outras situações contextuais

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

verificadas nesse Capítulo, com as funções exponenciais, favorece ao estudante a interpretação, a construção de modelos, a análise de representações e a resolução de problemas por meio da função exponencial, o que permite desenvolver as habilidades **EM13MAT304** e **EM13MAT403**, o que contribui para o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4**, respectivamente, da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

No terceiro Capítulo, ao estudar sobre o potencial hidrogeniônico (pH), motiva-se o exercício da curiosidade intelectual por meio da abordagem própria da ciência, como a investigação, a reflexão, a análise crítica para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas, conversando com a competência geral **2** da BNCC. Além disso, ao relacionar os cálculos de pH, entre outros, com a função logarítmica, utilizando diferentes registros matemáticos (algébricos, geométricos, computacional), busca-se contribuir para o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, de modo particular das habilidades **EM13MAT305** e **EM13MAT403**.

O estudo sobre sequências e sua relação com padrões presentes na natureza e em desenhos feitos na areia por diferentes povos africanos, apresentado no quarto Capítulo, permite aos estudantes o contato com conhecimentos historicamente construídos, bem como valorizar diferentes manifestações artísticas e culturais, reforçando o desenvolvimento da competência geral **3**. Além disso, o uso de estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, promovendo o trabalho com as progressões e a relação com funções de domínio discreto para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas, contribui para o desenvolvimento das habilidades **EM13MAT507** e **EM13MAT508**, referentes à competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

As atividades propostas buscam possibilitar ao estudante o desenvolvimento da investigação e da reflexão. Na seção **Explorando a tecnologia**, por exemplo, utilizando o **GeoGebra** será possível verificar, por meio de recursos interativos, propriedades relacionadas aos gráficos das funções estudadas e, no estudo de um fluxograma, verificar aspectos da linguagem computacional. Temas como consumo consciente de água, materiais radioativos, saúde, entre outros, figuram na seção **Conexões**, contribuindo para um trabalho integrado com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, possibilitando uma análise e compreensão da realidade utilizando conhecimentos de diferentes áreas do conhecimento. As questões coletivas, propostas nas **Aberturas de Capítulo** e no boxe **Fórum**, bem como em diversos momentos, possuem um papel importante, pois oportunizam a construção de ideias, promovendo o diálogo e o respeito mútuo.

No quadro a seguir, são apresentados os principais tópicos trabalhados neste Volume e algumas das relações possíveis de serem feitas com outros temas explorados na coleção.

	Tópicos	Temas relacionados
Capítulo 1 **Função definida por mais de uma sentença**	• Função definida por mais de uma sentença • Domínio, contradomínio e imagem de funções definidas por mais de uma sentença • Gráfico de funções definidas por mais de uma sentença • Funções sobrejetora, injetora e bijetora • Função composta • Função inversa e gráfico da função inversa • Módulo de um número real • Distância entre dois pontos na reta real • Função modular • Gráfico da função modular • Equação modular	• Conjuntos numéricos • Funções linear e afim • Função quadrática • Função exponencial • Função logarítmica • Geometria – proporcionalidade de semelhança

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

	Tópicos	Temas relacionados
Capítulo 2 **Função exponencial**	• Potenciação • Potência com expoente natural • Potência com expoente inteiro • Propriedades da potenciação • Radiciação • Propriedades da radiciação • Potência com expoente racional • Potência com expoente real • Função exponencial • Gráfico da função exponencial • Equações exponenciais • Inequações exponenciais	• Conjuntos numéricos • Matemática financeira: Juro composto
Capítulo 3 **Função logarítmica**	• Logaritmo • Propriedades operatórias dos logaritmos • Logaritmo de um produto • Logaritmo de um quociente • Logaritmo de uma potência • Mudança de base do logaritmo • Função logarítmica • Gráfico da função logarítmica • Relação entre função exponencial e função logarítmica • Equações logarítmicas • Inequações logarítmicas	• Função inversa • Matemática Financeira
Capítulo 4 **Progressões**	• Sequências • Sequências numéricas • Recorrência • Progressão aritmética (PA) • Soma dos termos de uma PA • Progressão geométrica (PG) • Soma dos termos de uma PG finita • Soma dos termos de uma PG infinita	• Função afim • Função exponencial

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Cronograma

O quadro a seguir apresenta uma sugestão de cronograma semestral, considerando cinco aulas semanais. No entanto, é importante que o professor avalie sua realidade e realize as adequações necessárias de modo a privilegiar o desenvolvimento dos estudantes de acordo com suas necessidades e com as escolhas feitas pela comunidade escolar, em especial, pelo próprio estudante.

Semana (5 aulas)	Capítulo	Tópicos
1ª	1	Abertura / Introdução / Função definida por mais de uma sentença / Gráfico
2ª	1	Conexões / Funções sobrejetora, injetora e bijetora / Função composta
3ª	1	Função inversa / Explorando a tecnologia / Módulo de um número real
4ª	1	Função modular / Equações modulares / Explorando a tecnologia / Para refletir
5ª	2	Abertura / Introdução / Potenciação e radiciação
6ª	2	Função exponencial / Gráfico da função exponencial
7ª	2	Explorando a tecnologia / Equações exponenciais
8ª	2	Inequações exponenciais / Conexões / Para refletir
9ª	3	Abertura / Introdução / Logaritmo / Propriedades operatórias dos logaritmos
10ª	3	História da Matemática / Função logarítmica / Gráfico da função logarítmica
11ª	3	Relação entre função exponencial e função logarítmica / Equações logarítmicas
12ª	3	Inequações logarítmicas / Explorando a tecnologia / Conexões / Para refletir
13ª	4	Abertura / Introdução / Sequências / Sequências numéricas
14ª	4	Progressão aritmética / Soma dos termos de uma PA / Progressão aritmética e função afim
15ª	4	Progressão geométrica / Soma dos termos de uma PG finita / Soma dos termos de uma PG infinita
16ª	4	Progressão geométrica e função exponencial / Explorando a tecnologia / Conexões / História da Matemática / Para refletir

Para todos os blocos semanais, estão disponíveis atividades resolvidas e atividades propostas. Recomenda-se a seleção de parte das atividades para ser desenvolvida em sala de aula (individualmente, em duplas ou grupos maiores) e outra parte para ser realizada fora do horário de aula. Além disso, é fundamental estabelecer um cronograma de avaliações que permita acompanhar os processos de aprendizagens dos estudantes no decorrer dos capítulos. No cronograma apresentado anteriormente, sugere-se que ocorra no fim de cada ciclo de duas semanas de estudo.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 1

Função definida por mais de uma sentença

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156, 157 e 158 deste livro.

- **Competências gerais:** 1, 2, 4, 7, 9 e 10
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 1: **EM13MAT101**
  - Competência específica 3: **EM13MAT302** e **EM13MAT314**
  - Competência específica 4: **EM13MAT401** e **EM13MAT404**
  - Competência específica 5: **EM13MAT510**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 1
- **Temas Contemporâneos Transversais:**
  - Educação Financeira, Educação para o Consumo, Ciência e Tecnologia e Educação Ambiental

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

O estudo de funções traz conceitos e procedimentos envolvendo modelos matemáticos que podem ser aplicados pelos estudantes em diversos contextos da vida social, por exemplo, o cálculo do imposto de renda e a estrutura de cobrança de contas mensais, como a de água e a de energia elétrica.

Ao utilizar conceitos e procedimentos matemáticos para compreender e explicar a realidade nos mais diferentes contextos, como o socioeconômico, o estudante está desenvolvendo a competência geral **1** e a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Por isso, a abertura do Capítulo pretende despertar o interesse dos estudantes em relação às funções, possibilitando uma discussão desse assunto e, ainda, verificar os conhecimentos prévios deles.

Na imagem é possível identificar elementos que remetem aos cálculos financeiros de receitas e despesas de uma família. Pedir aos estudantes que observem a imagem de abertura e comentem as impressões deles sobre o que ela sugere; tais apontamentos podem motivar uma discussão a respeito de despesas financeiras. Eles podem ser questionados quanto à participação deles na organização das despesas financeiras da família. As questões propostas nessa abertura podem auxiliar a discussão.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

O texto de abertura do Capítulo propõe uma reflexão a respeito dos compromissos financeiros de uma família e menciona o Imposto sobre a Renda de Pessoas Físicas (IRPF), seu objetivo e valores. É oportuno perguntar aos estudantes se conhecem o significado da palavra "imposto" e sabem para que ele serve. Uma das funções desse tipo de contribuição é aplicar melhorias nos serviços públicos.

Ao conversar a respeito do orçamento familiar, é possível utilizar materiais didáticos disponibilizados pela Estratégia Nacional de Educação Financeira (ENEF) em <https://www.vidaedinheiro.gov.br/em-livro1/> (acesso em: 27 jul. 2020).

> A Estratégia Nacional de Educação Financeira – ENEF – é uma mobilização multissetorial em torno da promoção de ações de educação financeira no Brasil. A estratégia foi instituída como política de Estado de caráter permanente, e suas características principais são a garantia de gratuidade das iniciativas que desenvolve ou apoia e sua imparcialidade comercial. O objetivo da ENEF, criada através do Decreto Federal 7.397/2010, é contribuir para o fortalecimento da cidadania ao fornecer e apoiar ações que ajudem a população a tomar decisões financeiras mais autônomas e conscientes. A estratégia foi criada através da articulação de nove órgãos e entidades governamentais e quatro organizações da sociedade civil, que juntos integram o Comitê Nacional de Educação Financeira – CONEF.
>
> QUEM somos. **ENEF**, c2017. Disponível em: https://www.vidaedinheiro.gov.br/quemsomos/. Acesso em: 27 jul. 2020.

Ao discutir a participação dos estudantes na organização e no planejamento de gastos que impactam no orçamento familiar, está sendo desenvolvido o Tema Contemporâneo Transversal **Educação Financeira**.

A atividade **1** tem o objetivo de conscientizar os estudantes da importância de participar da organização financeira familiar. Aproveitar esse momento para incentivá-los a discutir sobre a necessidade do empenho de todos os membros da família visando a uma vida financeira saudável e buscar alternativas para que as despesas não superem a renda daquele grupo. Eles podem pesquisar como elaborar um orçamento familiar e construir um planejamento conjunto, considerando valores que conheçam ou fazendo estimativas. A pesquisa proposta estimula os estudantes a pensar em suas despesas pessoais, em como podem auxiliar a sua família nesse assunto e na importância do planejamento financeiro.

Na atividade **2**, propor aos estudantes que pesquisem sobre impostos no decorrer da história e sua importância no financiamento dos gastos públicos. O IRPF foi instituído no Brasil em 31/12/1922 pela Lei 4.625; o 1º processamento eletrônico do IRPF foi realizado no exercício de 1968 e o preenchimento da declaração do IRPF pela internet teve início em 1997.

Conhecer a história do imposto possibilita aos estudantes a construção de argumentos com base em fatos e informações confiáveis; isso pode ser usado para defender ideias e pontos de vista, o que possibilita o desenvolvimento da competência geral **7**.

Na atividade **3**, os estudantes devem indicar exemplos de contas que cobram tarifas por faixa de consumo: água, telefone (algumas operadoras oferecem planos ou fazem cobrança de acordo com o tempo das ligações em minutos), internet (cobrança por consumo da internet/dados em MB ou GB), energia elétrica (tarifas baseadas no consumo por hora, bandeiras tarifárias). Espera-se que os estudantes percebam que podem associar, por exemplo, cada faixa de consumo a um tipo de função. Isso serve para verificar os conhecimentos prévios deles sobre função. É possível aproveitar o momento para perguntar qual é a relação desses exemplos com o estudo de funções.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

O texto de introdução tem como objetivo mostrar aos estudantes a relação entre o conceito de função definida por mais de uma sentença e o cálculo do imposto de renda. Perguntar aos estudantes que conceitos relacionados à função eles recordam do Ensino Fundamental. Isso auxilia na identificação de conhecimentos prévios sobre o assunto.

O texto a seguir propõe uma reflexão a respeito da definição de função apresentada como um conjunto de pares ordenados.

> [...]
>
> Um exemplo flagrante da falta de objetividade (que persiste até hoje em quase todos os livros didáticos brasileiros) é a definição de função como um conjunto de pares ordenados. Função é um dos conceitos fundamentais da Matemática (o outro é conjunto). Os usuários da Matemática e os próprios matemáticos costumam pensar numa função de modo dinâmico, em contraste com essa concepção estática. Uma transformação geométrica é uma função. Mas não é provável que exista alguém que imagine uma rotação, por exemplo, como um conjunto de pares ordenados. [...]
>
> Além do mais, a definição de função como uma correspondência é muito mais simples, mais intuitiva e mais acessível ao entendimento do que a outra, que usa uma série de conceitos preliminares, como produtos cartesianos, relação binária, etc. [...]
>
> LIMA, E. L. Conceituação, manipulação e aplicações: dois problemas e duas soluções. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 41. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/41/1.htm. Acesso em: 27 jul. 2020.

Se considerar necessário, recordar com os estudantes a definição de função como uma relação entre grandezas, ou entre conjuntos, que pode ser representada por meio de expressões matemáticas, sendo essencial para diversas áreas como Química, Biologia, Economia, entre outras. Relembrar que, em uma função, o valor y de uma grandeza (variável dependente) varia de acordo com o valor x atribuído a outra grandeza (variável independente), o que é representado por meio da lei de formação da função que associa x a y e forma pares ordenados.

Perguntar aos estudantes o que eles entendem por modelo matemático e comentar que, em nossa sociedade, temos muitas situações estudadas por meio desses modelos. Eles são criados com base em estudos científicos e são representados por símbolos e relações matemáticas a partir de algum fenômeno ou situação.

Função definida por mais de uma sentença

Retomar a discussão a respeito do IRPF, apresentando a tabela de incidência mensal para 2020. Ao fazer a leitura dessa tabela com os estudantes, verificar se eles compreenderam a relação entre as colunas: base de cálculo, alíquota e parcela a deduzir do IRPF. O boxe **Saiba que...** traz a explicação do termo alíquota. É interessante propor perguntas, como: "Como você interpreta a parcela a deduzir?"; "Por que existe uma parcela a deduzir?", "A função definida nesse caso é linear?".

Utilizar o primeiro boxe **Pense e responda** para que os estudantes reflitam a respeito do conceito de função desenvolvido no Ensino Fundamental. Retomar esse conceito, se necessário, pois ele será utilizado em aplicações das funções definidas por mais de uma sentença. Espera-se que eles compreendam que o valor pago pelo imposto de renda depende do valor da base de cálculo. Para que os estudantes possam compreender isso e perceber que, para cada valor da base de cálculo x, há um único valor de contribuição mensal do imposto de renda $f(x)$, apresentar um exemplo, definindo um valor para x e propor aos estudantes que calculem a contribuição mensal do imposto de renda para esse valor.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Após apresentar a lei de formação da função referente ao valor pago pelo imposto de renda, com base na tabela de incidência mensal do IRPF vigente em 2020, o segundo boxe **Pense e responda** propõe uma questão de interpretação dessa lei de formação. Espera-se que os estudantes compreendam que ser isento desse imposto está relacionado com o fato de a base de cálculo ser igual ou abaixo de R$ 1.903,98.

Pedir aos estudantes que assistam ao vídeo **História do Imposto de Renda**, disponível no boxe **Para assistir**, produzido pela Receita Federal, de aproximadamente 6 minutos. Comentar que o leão é o símbolo do imposto de renda, escolhido em 1979, como mensagem do governo brasileiro de que não admite sonegação de impostos.

Conversar com os estudantes sobre como era calculado o imposto de renda antes de sua informatização em 1997 e discutir a respeito da necessidade de realizar manualmente o cálculo do imposto a pagar ou a ser restituído, pois não havia a tecnologia que temos atualmente. Comentar que, nos dias de hoje, a declaração de imposto de renda pode ser realizada por um aplicativo no aparelho celular. Essa discussão colabora com o desenvolvimento da competência geral **1**, valorizando e utilizando os conhecimentos historicamente construídos sobre o mundo para entender e explicar a realidade.

FÓRUM

Ler o texto com os estudantes e, em seguida, reservar um momento de discussão sobre as questões propostas. Elas levam os estudantes a argumentar com base em informações confiáveis e construir pontos de vista e posicionamentos, desenvolvendo a competência geral **7**, além de utilizar estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em questões socioeconômicas, desenvolvendo a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT101**.

A primeira questão propõe uma reflexão acerca da importância da arrecadação do imposto de renda para a população do país. Recomenda-se incentivar os estudantes a discutir sobre a importância da arrecadação de impostos e como os governos devem utilizar o dinheiro arrecadado em benefício da população, como serviços de saúde, educação, obras de infraestrutura, programas sociais etc. Pode ser realizado um trabalho com o professor da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, destacando aspectos relacionados a renda e orçamento das famílias em diferentes regiões do país e sobre como essa tributação pode influenciar o bem-estar dessas famílias.

Na segunda, espera-se que os estudantes verifiquem que a população de renda mais baixa sofre mais com a não correção da tabela do imposto de renda, embora todos os contribuintes estejam pagando mais imposto. Mais informações podem ser obtidas em <https://g1.globo.com/economia/noticia/2020/01/10/com-inflacao-de-2019-defasagem-da-tabela-do-ir-chega-a-103percent-dizem-auditores-da-receita.ghtml> (acesso em: 16 jun. 2020).

Como sugestão para ampliar essa discussão, propor aos estudantes a seguinte questão: "No vídeo sobre a história do imposto de renda, ouvimos o especialista comentar que esse imposto pode tornar a sociedade menos desigual. No entanto, os veículos de comunicação apontam que a desigualdade tributária afeta a renda do brasileiro mais pobre. Por que isso acontece?". Espera-se que eles percebam que isso ocorre porque o modelo de cálculo utilizado no imposto de renda, como outros modelos matemáticos da sociedade, é construído a partir de critérios gerais para uma grande quantidade de pessoas, o que pode favorecer certos grupos sociais.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Ao desenvolver o tópico **Domínio, contradomínio e conjunto imagem**, observar se os estudantes compreendem esses termos e conseguem identificá-los em alguns exemplos de funções. No caso do imposto de renda, cada faixa se relaciona a uma alíquota diferente e, consequentemente, o cálculo é feito de maneira distinta. Assim, para cada faixa, é possível escrever uma sentença. Como sugestão, retornar ao cálculo do imposto de renda e identificar os termos da função.

No tópico **Gráfico**, são apresentadas diferentes maneiras de representar uma função: algebricamente, por tabela e por gráfico. Ao compreender essas representações, os estudantes estão desenvolvendo a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT401**.

Ressaltar que o gráfico de uma função afim é representado por uma reta, considerando o domínio e a imagem, e que a função linear é um caso particular da função afim. Com base nisso, para obter a representação gráfica desse tipo de função, basta localizar no plano cartesiano dois pontos pertencentes ao gráfico e traçar a reta que passa por eles.

Recordar como construir um gráfico, enfatizando a importância de utilizar uma escala adequada. Sugerir aos estudantes que construam o gráfico do exemplo desse tópico para que compreendam melhor o procedimento de construção.

Em relação ao gráfico correspondente à função dada por $y = 6$ no intervalo $]5, +\infty[$, questionar os estudantes sobre o motivo pelo qual ele é uma semirreta paralela ao eixo x, considerando os valores de x maiores do que 5. Espera-se que eles compreendam que isso tem relação com o domínio da função.

No boxe **Pense e responda**, verificar as possíveis respostas apresentadas pelos estudantes, promover uma reflexão e avaliar a compreensão dos conceitos de domínio, contradomínio e conjunto imagem de uma função com mais de uma sentença. Verificar se os estudantes conseguem identificar os pontos do plano cartesiano que satisfazem à função apresentada.

O texto a seguir aborda os diferentes estilos de aprendizagem dos estudantes e a sua relação com a Álgebra. Conhecer os diversos estilos pode auxiliar a criar estratégias de ensino diversificadas, contribuindo com o aprendizado dos estudantes.

Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de Matemática

[...]

[...] É importante notar, no entanto, que não há um estilo "puro" e que as características indicam apenas o estilo **preferencial**.

a) Ativo / Reflexivo:

Os aprendizes ativos preferem aprender agindo sobre algo, testando, aplicando, manipulando, discutindo ou explicando o conteúdo para os outros. Privilegiam o trabalho em grupo e lhes é muito difícil quedar-se apenas a ouvir explanações. [...]

O aluno reflexivo prefere pensar sobre as informações, processando-as introspectivamente antes de trabalhar com elas. [...]

b) Sensitivo / Intuitivo:

Ao selecionar as informações a que estão expostos constantemente, através dos sentidos ou de suas próprias reconstruções mentais, os aprendizes sensoriais preferem as informações práticas, concretas, os fatos, as observações, o que vêm através dos sentidos. São metódicos, preferem resolver os problemas através de testagens. [...]

Os intuitivos fixam-se mais nos conceitos e teorias, no que surge através da reflexão, da imaginação. Assim, ainda que tenham compreendido a analogia, aos intuitivos não basta essa ideia, é necessário refletir sobre o que se viu e voltar às definições várias vezes. [...]

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) Visual / Verbal:

Em atividades de ensino-aprendizagem, as informações que chegam do mundo exterior atingem, principalmente, nossos olhos e ouvidos. Os aprendizes visuais privilegiam as que vêm por imagens, diagramas, gráficos, esquemas, enquanto que os verbais preferem captar o que é falado, o que está escrito, as fórmulas que estão arroladas. [...]

d) Indutivo / Dedutivo:

Muito se tem discutido sobre a melhor forma de apresentar um assunto, ou seja, se devemos partir do particular para o geral ou vice-versa. Os aprendizes indutivos preferem ver primeiramente os casos específicos (as observações, os resultados de experiências, os exemplos gráficos ou numéricos) para depois chegar à compreensão dos princípios e teorias. Os dedutivos, ao contrário, preferem ter primeiramente a visão geral da teoria e deduzir as suas aplicações para os casos específicos. [...]

e) Sequencial / Global:

Os aprendizes sequenciais gostam de aprender passo a passo, de forma que cada informação seja obtida logicamente da anterior. São capazes de resolver problemas ainda que não tenham uma compreensão global do assunto em pauta e suas soluções são ordenadas e fáceis de entender. Os aprendizes globais captam as informações quase que aleatoriamente, não vendo as conexões até que de repente todo o quadro se lhes configura na mente, sendo então capazes de resolver rapidamente problemas complexos, apesar de ter dificuldade em explicar as sequências de passos de seus raciocínios.

[...]

CURY, H. N.; LANNES, W.; BROLEZZI, A. C.; VIANNA, C. R. Álgebra e educação algébrica: concepções de alunos e professores de Matemática. **Educação Matemática em Revista – RS**, Rio Grande do Sul, v. 1, n. 4, dez. 2002. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/revista/index.php/EMR-RS/issue/view/149. Acesso em: 28 jul. 2020.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

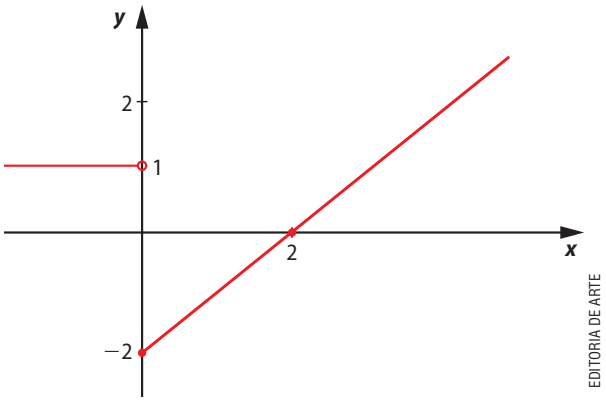
Na seção **Atividades resolvidas**, são apresentadas situações que envolvem a análise de funções definidas por mais de uma sentença em suas representações algébrica e gráfica, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT404**.

Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e orientar os estudantes a apresentar as dúvidas para saná-las. É importante que eles se manifestem caso notem outra possibilidade de resolução diferente da que foi apresentada.

Para ampliar o estudo, propor aos estudantes que representem graficamente a função da atividade resolvida **1** e que determinem o domínio e o conjunto imagem da função.

A primeira sentença, $y = 1$ se $x < 0$ corresponde a uma função constante e a segunda sentença, $y = x - 2$ se $x \geqslant 0$ corresponde a uma função afim.

Para essa função, $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-2, +\infty[$.



EDITORIA DE ARTE

A atividade proposta **1** é uma aplicação de conceitos matemáticos em uma situação real. Os vendedores precisam saber como é calculado o valor da comissão, o que é feito por meio de uma modelagem matemática. Interpretar a matemática envolvida nesse tipo de contexto permite acompanhar a evolução do recebimento de comissões e, ainda, construir argumentos plausíveis para negociar valores e percentuais. Aprofundar a discussão acerca dessa atividade discutindo com os estudantes quais poderiam ser as metas de vendas para que os vendedores alcancem o salário desejado. É importante destacar que o domínio da função, nesse contexto, é o conjunto dos números naturais, pois é referente às unidades vendidas. Logo, ao construir um gráfico representativo dessa situação, têm-se pontos do plano cartesiano.

Comentar com os estudantes a importância de conhecer estratégias e conceitos matemáticos, como o de funções definidas por mais de uma sentença, para auxiliar a resolver problemas do dia a dia. Isso colabora com o desenvolvimento das competências específicas **1** e **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Na atividade proposta **6**, para determinar a lei de uma função *f*, definida por mais de uma sentença, que modela os valores a serem pagos pelo consumo de gás, considerar o valor fixado, correspondente ao total consumido, adicionado aos resultados dos produtos, por faixa de consumo, entre volume consumido e o valor variável correspondente, como exemplificado na atividade.

É interessante propor um trabalho integrado com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, investigando propriedades físicas e químicas do gás natural, como pressão e combustão. Pode ser um projeto de investigação em grupo, de modo que os estudantes busquem embasamento para relatar as vantagens e as desvantagens da utilização do gás encanado em uma residência do bairro ou na escola em que estudam. Uma das vantagens desse tipo de serviço, por exemplo, é o funcionamento contínuo do gás, mas devem-se analisar aspectos econômicos, de segurança, ambientais, entre outros. Esse tipo de pesquisa pode ser resumido em um quadro ou os estudantes poderão elaborar um folheto explicativo sobre as informações que obtiveram. Esse trabalho favorece o desenvolvimento das competências gerais **2**, **4** e **7** e da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT101**.

> CONEXÕES

Nesta seção, pretende-se despertar a curiosidade intelectual, por meio da abordagem própria das ciências, com base nos conhecimentos das diferentes áreas, como descreve a competência geral **2** e, ainda, desenvolver a capacidade de argumentar e agir com base em informações confiáveis, promovendo a consciência ambiental e o consumo responsável, como orienta a competência geral **7**. Além disso, as discussões propostas têm como objetivo levar os estudantes a praticar o diálogo e a empatia em um ambiente de cooperação, respeitando a diversidade e desenvolvendo, assim, a competência geral **9**.

A partir do tema consumo de água, são propostas atividades que possibilitam a compreensão e a utilização de diferentes registros de representação matemáticos para solucionar problemas, desenvolvendo a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias** e os Temas Transversais Contemporâneos **Educação Ambiental** e **Educação para o Consumo**.

Acompanhar os textos e os gráficos dessa seção com os estudantes e propor a seguinte questão: "De que maneira a Matemática pode auxiliar o planejamento de um consumo consciente de água?". Destacar que as informações sobre a distribuição e o consumo de água envolvem dados matemáticos que, quando bem interpretados, podem ser utilizados

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

para analisar criticamente e auxiliar na tomada de decisões que envolvem questões de consumo e de sustentabilidade. Se considerar necessário, solicitar aos estudantes que levem uma conta de água para essa aula para que eles possam acompanhar a interpretação de cada parte que compõe a conta. Sugere-se questionar: "Onde você mora o esgoto é canalizado?"; "No município onde você mora, há tratamento de esgoto?"; "Na conta de água de sua casa, há cobrança de taxa de esgoto?".

É um momento importante para realizar uma reflexão a respeito do consumo de água nas residências dos estudantes, orientando a discussão a partir de informações trazidas por eles, por exemplo, atitudes para economizar ou reaproveitar água. Essa reflexão é proporcionada na questão **1** em que será elaborado um panfleto. Pode ser sugerida a utilização de infográficos na elaboração desse panfleto.

Os infográficos são muito utilizados em diferentes mídias, pois compõem gráficos, imagens e textos sobre certo assunto, organizando as informações para facilitar o entendimento. Existem editores de infográficos gratuitos, sendo necessária apenas a disponibilidade de um computador com acesso à internet, como o Canva, disponível em <http://www.canva.com/pt_br/criar/infografico/> (acesso em: 28 jul. 2020).

Espera-se que, no panfleto elaborado para essa questão, apareçam informações como: ao lavar a louça, retirar os restos de alimentos deixados nos pratos e nas panelas e depositá-los no lixo; deixar a torneira fechada enquanto ensaboa os utensílios. Orientar os estudantes a apresentar números referentes à pesquisa realizada. A seguir, apresentamos um exemplo de folheto com algumas dicas de economia de água, divulgado pelo Governo do Estado de Minas Gerais.

AGÊNCIA REGULADORA DE SERVIÇOS DE ABASTECIMENTO DE ÁGUA E ESGOTAMENTO SANITÁRIO DE MINAS GERAIS.

A questão **2** relaciona o tema da seção ao conceito de função definida por mais de uma sentença estudado neste Capítulo. Espera-se que os estudantes considerem x o consumo de água, em metro cúbico, e $f(x)$ o valor a ser pago, em reais, pelo fornecimento de água e coleta de esgoto e obtenham, por exemplo, a seguinte lei de formação:

$$f(x) = \begin{cases} 26{,}18 + 26{,}18 \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 52{,}36 + 8{,}20(x - 10), \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 52{,}36 + 8{,}20 \cdot 10 + 20{,}46(x - 20), \text{ se } 20 < x \leqslant 30 \\ 52{,}36 + 8{,}20 \cdot 10 + 20{,}46 \cdot 10 + 20{,}46(x - 30), \text{ se } 30 < x \leqslant 50 \\ 52{,}36 + 8{,}20 \cdot 10 + 20{,}46 \cdot 10 + 20{,}46 \cdot 10 + 22{,}54(x - 50), \text{ se } x > 50 \end{cases}$$

$$\text{ou } f(x) = \begin{cases} 52{,}36, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 10 \\ 52{,}36 + 8{,}20(x - 10), \text{ se } 10 < x \leqslant 20 \\ 134{,}36 + 20{,}46(x - 20), \text{ se } 20 < x \leqslant 30 \\ 338{,}96 + 20{,}46(x - 30), \text{ se } 30 < x \leqslant 50 \\ 543{,}56 + 22{,}54(x - 50), \text{ se } x > 50 \end{cases}$$

A questão **3** possibilita avaliar como os estudantes se organizam para fazer uma pesquisa. É importante que eles fiquem atentos a alguns aspectos: selecionar e divulgar os dados relevantes; compreender os conceitos relacionados à função definida por mais de uma sentença; elaborar, analisar e interpretar gráficos; relacionar os dados matemáticos com o contexto social. A resposta vai depender do município em que a pesquisa foi realizada. Para saber a respeito da coleta de esgoto, acesse o *site* elaborado pela Agência Nacional de Águas (ANA) e a Secretaria Nacional de Saneamento Ambiental, disponível em <http://atlasesgotos.ana.gov.br/> (acesso em: 31 jul. 2020).

Funções sobrejetora, injetora e bijetora

No desenvolvimento dos conceitos das funções sobrejetora e injetora, optou-se por apresentar as definições matemáticas, a lei das funções e os diagramas. A representação gráfica será apresentada ao discutir o conceito de função bijetora.

Ao desenvolver o tópico **Função sobrejetora**, pode-se apresentar o seguinte exemplo: considere a função em que cada estudante, ao ser matriculado na escola, tenha seu cadastro associado à sua data de nascimento. Pode ocorrer que dois estudantes tenham a mesma data de nascimento. Assim, elementos distintos do domínio podem ter a mesma imagem.

Enfatizar que a função é sobrejetora se o conjunto imagem for igual ao contradomínio, e uma função não é sobrejetora quando existe pelo menos um elemento do contradomínio que não é imagem de nenhum elemento do domínio.

No boxe **Pense e responda** desse tópico espera-se que os estudantes utilizem o fato de que um número par pode ser escrito na forma $2n$, sendo n um número natural. Nesse caso, a lei da função g pode ser reescrita na forma $g(x) = 2x + 2 + 1$, ou ainda, $g(x) = 2(x + 1) + 1$. Considerando $n = x + 1$, verificamos que o conjunto imagem da função g é formado apenas por números ímpares, ou seja, números na forma $2n + 1$, em que n é um número natural.

No tópico **Função injetora**, se considerar necessário, utilizar o seguinte exemplo: considere a função em que cada estudante, ao ser matriculado na escola, tenha associado um número de matrícula. Nesse caso, não existe a possibilidade de dois estudantes terem o mesmo número de matrícula. Assim, elementos distintos do domínio possuem imagens diferentes.

Uma função é injetora se, e somente se, elementos distintos do domínio da função possuem imagens distintas. Recomenda-se verificar, com os estudantes, essa propriedade por meio do gráfico da função. É importante observar que não é suficiente considerar apenas a associação dos elementos, mas é preciso também definir quem são os conjuntos domínio e contradomínio.

O boxe **Pense e responda** desse tópico leva os estudantes a refletirem sobre as características das funções injetoras e sobrejetoras ao solicitar que comparem o exemplo dado. A resposta esperada para a pergunta desse boxe são os números 3 e 4. Se os números 3 e 4 pertencessem ao conjunto A, continuaríamos tendo elementos distintos do domínio associados a elementos distintos do contradomínio pela função f e, além disso, todo elemento do contradomínio seria imagem de pelo menos um elemento do domínio da função f.

Ao desenvolver o tópico **Função bijetora**, é importante ressaltar que o contradomínio deve ser igual ao conjunto imagem (ser sobrejetora) e os elementos distintos do

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

domínio devem ter imagens distintas (ser injetora). Esse conceito é verificado em cada um dos boxes **Pense e responda** desse tópico. No primeiro desses boxes, espera-se que os estudantes respondam que a função f é sobrejetora, pois todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio; é injetora, pois elementos distintos do domínio são associados pela função f a elementos distintos do contradomínio. No segundo boxe, a função g não é injetora, pois existem $x_1, x_2 \in D(g)$, com $x_1 \neq x_2$, para os quais temos $g(x_1) = g(x_2)$, ou seja, elementos distintos do domínio são associados pela função g à mesma imagem. No terceiro desses boxes, a função h é injetora, pois elementos distintos do domínio são associados pela função h a elementos distintos do contradomínio. Pode-se solicitar aos estudantes que deem um exemplo de uma situação que pode ser modelada pela função h.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Explorar detalhadamente as resoluções das atividades para levantar possíveis dúvidas que os estudantes tiveram ao desenvolver os conceitos de função sobrejetora, injetora e bijetora.

Na atividade resolvida **4**, pedir aos estudantes que destaquem pelo menos um elemento do contradomínio que não é imagem, pela função g, de um elemento do domínio, por exemplo, o número 1. Além disso, eles podem verificar que há elementos distintos do domínio cujas imagens, pela função g, são elementos iguais, por exemplo, $g(5) = g(8) = 2$. Desse modo, a função não é sobrejetora nem injetora.

Caso considere oportuno, recordar com os estudantes que, considerando o conjunto dos números reais como domínio e contradomínio:

- a função identidade, definida por $f(x) = x$ é bijetora;
- a função afim, cuja lei de formação é $f(x) = ax + b$, sendo $a \neq 0$, é bijetora;
- a função quadrática, cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo $a \neq 0$, não é bijetora.

Durante a resolução dessas atividades, orientar os estudantes a expor as dúvidas que forem surgindo e retornar às atividades resolvidas, se for necessário, para verificar algum conceito ou procedimento realizado. É interessante pedir aos estudantes, antes de iniciar a resolução dessas atividades, que elaborem um esquema contendo as diferenças e definições de função sobrejetora, injetora e bijetora. Esse esquema pode ser feito de diferentes maneiras, por exemplo, usando gráficos, mapa mental, tópicos explicativos ou imagens. Esse tipo de atividade contribui para o desenvolvimento da competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Função composta

Neste tópico, são utilizados estratégias, conceitos e definições que possibilitam a criação de modelos envolvendo funções, bem como situações que envolvem a resolução de problemas de diferentes naturezas, o que possibilita o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática de suas Tecnologias**, habilidades **EM13MAT302** e **EM13MAT314**.

O texto inicial apresenta uma situação-problema que envolve um contexto econômico. Optou-se por não apresentar previamente a definição de função composta para que a discussão a respeito desse tema seja realizada no desenvolvimento do problema. Espera-se que os estudantes percebam que há uma relação direta entre o lucro e o custo da matéria-prima. Antes de dar a resposta, sugere-se promover um debate com a turma e usar a calculadora para fazer simulações de valores para que os estudantes possam criar hipóteses a respeito de como seria a função lucro.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Com base no exemplo, questionar os estudantes sobre qual seria a vantagem de utilizar a função composta na resolução do problema. Espera-se que eles percebam que na função composta $L = 8 + 0{,}8P$ é possível relacionar o lucro L ao valor P, gasto em matéria-prima.

Destacar que, no estudo de função composta, a ordem de composição das funções deve ser respeitada, pois, em geral, $g \circ f \neq f \circ g$, ou seja, $g(f(x)) \neq f(g(x))$, o que significa que não vale a propriedade comutativa. Isso pode ser verificado no boxe **Pense e responda**.

Função inversa

O texto inicial apresenta uma situação-problema que envolve um contexto geométrico que pode ser modelado por uma função, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT302**. No desenvolvimento do conteúdo, optou-se por não apresentar previamente a definição de função inversa para que esse tema fosse discutido durante o desenvolvimento da situação-problema. Recordar que cada lado do triângulo apresentado mede x, pois é um triângulo equilátero que tem os ângulos congruentes e os lados congruentes. Verificar se os estudantes compreenderam quais são as variáveis envolvidas na situação-problema e como elas se relacionam.

Ao mostrar as representações dos diagramas, enfatizar que, da mesma maneira que os elementos do primeiro conjunto determinam valores do contradomínio, é possível inverter a direção da operação. Quando isso ocorre, invertemos os papéis dos conjuntos, o domínio se torna contradomínio e vice-versa. Ressaltar que a função bijetora pode ser invertível, conforme indicado no boxe **Saiba que...** Para isso, sugere-se propor aos estudantes que explicitem os domínios e as imagens das funções f e f^{-1}, o que pode ser facilitado com o uso do **GeoGebra**.

No tópico **Gráfico da função inversa**, empregam-se a representação geométrica de funções por meio da distinção do comportamento proporcional e a investigação dos dados relativos às variáveis numéricas, como descrevem as competências específicas **4** e **5**, da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidades **EM13MAT401** e **EM13MAT510**.

Para ampliar esse assunto, pedir aos estudantes que representem o gráfico da função em um papel quadriculado e utilizando o **GeoGebra**. Aproveitar esse momento para recordar o conceito de bissetriz de um ângulo: semirreta que se origina no vértice desse ângulo e determina, com seus lados, dois ângulos adjacentes congruentes.

Sugere-se propor aos estudantes que pensem no gráfico de uma função para justificar a afirmação feita no boxe **Saiba que...**.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas contemplam os conceitos de função composta e função inversa. Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar as dúvidas.

Na atividade resolvida **5**, lembrar os estudantes de que a composição de funções não é comutativa, observando que o valor numérico de $f \circ g$ é diferente de $g \circ f$.

Na atividade resolvida **8**, para traçar o gráfico de uma função afim, podem-se determinar dois pontos pertencentes ao gráfico. O gráfico da função afim, definida por $f(x) = ax + b$, intersecta o eixo das ordenadas em $y = b$ e o eixo das abscissas em $x = \frac{-b}{a}$, a $\neq 0$. É importante comentar com os estudantes que há outras maneiras de construir o gráfico de uma função afim, não apenas usando a tabela de pontos. Pode-se verificar a lei da função para observar suas características e determinar os pontos. Ou, então, usar a translação.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Verificar as possíveis respostas apresentadas pelos estudantes, promover uma reflexão e avaliar a compreensão sobre os conceitos estudados até o momento. Enfatizar a importância de identificar o domínio e o contradomínio de cada função antes de resolver as atividades.

Na atividade proposta **23**, é importante que os estudantes consigam justificar a resposta de cada item após analisar as características dos gráficos das funções representadas para decidir se uma é a inversa da outra. Para complementar essa atividade, propor aos estudantes que indiquem como deveria ficar o gráfico das funções para que uma seja a inversa da outra nos itens em que isso não ocorre.

Na atividade proposta **24**, recomenda-se questionar os estudantes sobre a função inversa de *f*, pedindo a eles que explicitem o domínio e o contradomínio dessa função.

Como sugestão, propor a seguinte atividade aos estudantes para que eles possam relacionar o conceito de função composta a outro conteúdo, bastante explorado na área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**:

Uma função que pode ser utilizada para converter certa temperatura expressa em °F para °C é $C(x) = 5 \cdot \left(\frac{x - 32}{9} \right)$, em que x é a medida em grau Fahrenheit. Uma outra função utilizada para converter determinada temperatura em °C para K é $K(x) = x + 273$, em que x é a medida em grau Celsius. Determine a lei da função composta que possibilita converter diretamente uma temperatura em °F para K.

Resolução:

$$K(C(x)) = 5 \cdot \left(\frac{x - 32}{9} \right) + 273 \Rightarrow K(C(x)) = \frac{5x - 160}{9} + 237 \Rightarrow K(C(x)) = \frac{5x + 2297}{9}$$

Aproveitar esse momento para solicitar aos estudantes que pesquisem em que situações ou lugares costuma-se usar como unidade de medida de temperatura cada uma das que apareceram nessa atividade: Celsius, Fahrenheit e Kelvin.

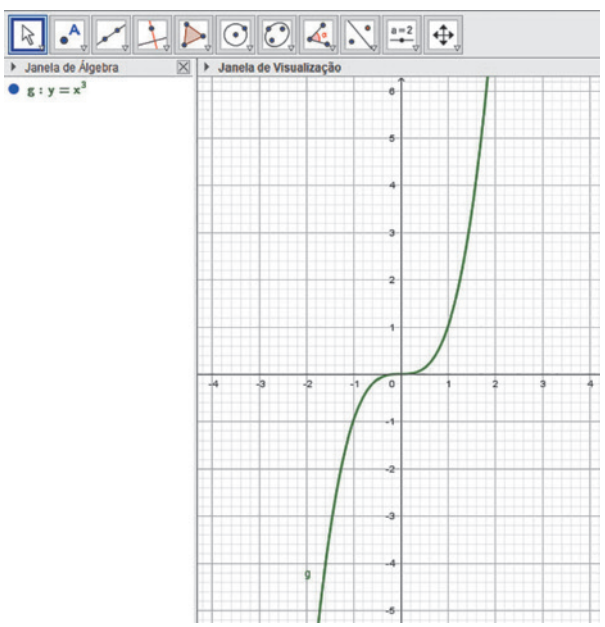
> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

O objetivo dessa seção é propor aos estudantes que representem graficamente funções polinomiais de 2º grau no plano cartesiano, utilizando *softwares* ou aplicativos de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**.

No *site* do **GeoGebra** há várias informações disponíveis, inclusive alguns tutoriais e materiais produzidos por professores que podem auxiliar o desenvolvimento de conceitos algébricos e geométricos. Em <https://ogeogebra.com.br/site/index.php> (acesso em: 29 jul. 2020), há materiais e recursos para capacitar usuários em seus aspectos técnicos e fomentar reflexões sobre o uso do **GeoGebra** em situações de ensino e aprendizagem.

Para informações de como construir gráficos de funções utilizando o **GeoGebra**, acessar o vídeo disponível em <https://ogeogebra.com.br/site/videosreproduzir.php?idvideo=14> (acesso em: 29 jul. 2020).

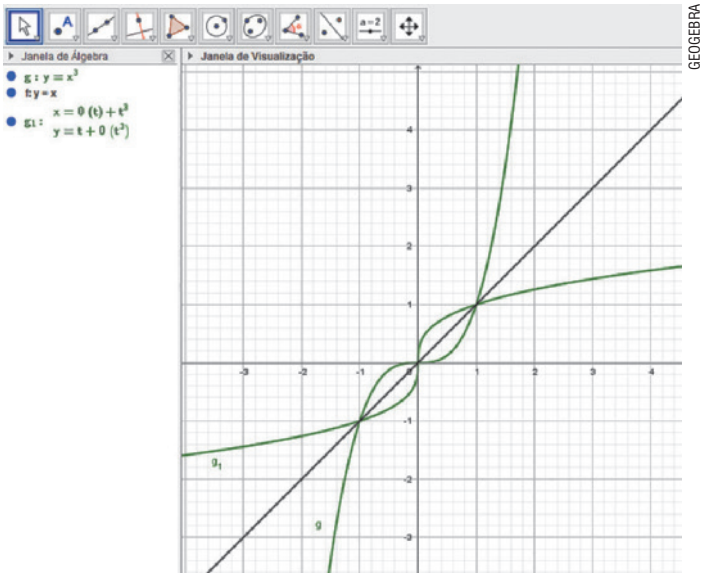
Ao lado, apresentamos o gráfico solicitado na atividade **1**.



A função g é bijetora, pois, traçando retas paralelas ao eixo x, passando por pontos cuja ordenada pertence a CD(g), elas cruzam o gráfico de g em um único ponto. Também é possível verificar se a função é inversível algebricamente, analisando os passos que determinam a função inversa.

Na atividade **2**, não é necessário restringir o domínio, pois g é uma função bijetora e, portanto, admite a função inversa.

Na atividade **3**, ao representar o gráfico da função g^{-1}, encontram-se três pontos de intersecção, quais sejam (1, 1), (0, 0) e (−1, −1), conforme pode ser observado a seguir.



Módulo de um número real

Este tópico apresenta o conceito de módulo a partir da definição algébrica, geométrica e sua relação com distância e comprimento, o que auxilia os estudantes a compreender intuitivamente o significado de algumas propriedades envolvendo módulo.

Comentar com os estudantes que, em **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, a nomenclatura "módulo da velocidade" é utilizada com frequência e significa valor absoluto da velocidade.

Destacar as propriedades do módulo de um número real e, se julgar necessário, pedir aos estudantes que atribuam valores a x para verificarem cada propriedade.

No tópico **Distância entre dois pontos na reta real**, explorar a situação apresentada. Sugerir, como exemplo, que os estudantes localizem os pontos que representam os números -6; $-\sqrt{10}$; 0,5; 1; 3 em uma reta real e determinem a distância entre esses pontos e o ponto referente ao número 3 para visualizar o comprimento dos segmentos. Isso pode ajudá-los a verificar a afirmação do boxe **Saiba que...**, em que a distância entre dois pontos A e B, localizados na reta real, pode ser dada por $|x_B - x_A|$ ou $|x_A - x_B|$.

Função modular

Neste tópico, questionar os estudantes se eles compreendem o motivo de a função modular ser um caso particular da função definida por mais de uma sentença, o que favorece o desenvolvimento da competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT404**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Sempre que possível, contextualizar conceitos matemáticos para aproximá-los da realidade dos estudantes ou apresentar aplicações desses conceitos em outras áreas. Um exemplo de contextualização pode ser consultado no *link* <http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vii/paper/viewFile/7737/3944> (acesso em: 28 jul. 2020), em que é descrito um trabalho com a função modular aplicada em eletrônica envolvendo uma ponte retificadora. Esse relato foi apresentado no VII Congresso Internacional de Ensino de Matemática de 2017.

Uma possibilidade de trabalho a realizar com os estudantes é aproveitar a seção **Explorando a tecnologia**, que fez uso do **GeoGebra**, para utilizá-la na representação de funções modulares; nesse caso, o comando utilizado para a função modular é $f(x) =$ abs(função), em vez de "função", escreve-se a função que aparece dentro do módulo. Esse tema será desenvolvido na segunda seção **Explorando a tecnologia** deste Capítulo. A partir dos exemplos apresentados no texto, os estudantes podem observar o comportamento da função modular e o que ocorre com as translações dos gráficos.

Equações modulares

Este tópico recorda os conceitos de equação modular. É oportuno, nesse momento, questionar os estudantes sobre qual é a diferença entre equação e função para verificar os conhecimentos prévios deles sobre o assunto. É importante que eles compreendam que equações envolvem relações de igualdade envolvendo valor(es) desconhecido(s) que torna(m) a igualdade verdadeira, enquanto funções envolvem relações entre variáveis.

O texto a seguir propõe a aplicação das equações matemáticas no estudo de espécies de anfíbios. Como sugestão, compartilhá-lo com os estudantes para que aumentem o repertório de estudos da Matemática em outras áreas do conhecimento.

Equações preveem evolução no tamanho de anfíbios

[...]

Um estudo publicado na revista *The American Naturalist* propõe equações matemáticas que preveem se espécies de anfíbios tendem ou não a variar seus tamanhos corporais conforme o espaço geográfico. A pesquisa, liderada pelo biólogo Sidney Gouveia, da Universidade Federal de Sergipe e apoiado pelo Instituto Serrapilheira, resolve um debate que se estende desde os anos 60, sobre se animais ectotérmicos (que não regulam suas temperaturas corporais internamente) apresentam variação de tamanho em função do clima.

"O tamanho corporal é uma característica crítica dos animais que está relacionada à sensibilidade desses organismos a variações ambientais", explica Gouveia. "Por isso, esse trabalho pode nos ajudar a prever quais espécies serão mais sensíveis a mudanças climáticas."

Entender como o tamanho evolui e varia no espaço geográfico é fundamental para se compreender a própria diversidade biológica. No século 19, o naturalista alemão Carl Bergmann descobriu que o tamanho dos animais de sangue quente, como aves e mamíferos, determinava o quanto eles perdiam ou conservavam seu calor corporal e por isso, em regiões mais frias, os animais tendiam a ser maiores.

Desde o início do século 20, existe um debate sobre se esse fenômeno aconteceria em animais de sangue frio, como insetos, répteis e anfíbios. Neste estudo, conduzido em colaboração com pesquisadores de São Paulo, Goiás e da Espanha, foram combinadas equações matemáticas, informações de vários laboratórios e coleções biológicas para mostrar que, no caso dos anfíbios, o fato principal dessa evolução e variação de tamanho é a economia de água, não de calor.

"De modo geral, a água desempenha um papel central na ecologia e evolução dos anfíbios. O que fizeram foi conseguir elaborar uma fórmula matemática que prevê a trajetória evolutiva de diferentes espécies em relação a suas adaptações para economizar a água do corpo", destaca Gouveia. [...]

EQUAÇÕES preveem evolução no tamanho de anfíbios. **Impa**, 21 jan. 2019. Disponível em: https://impa.br/noticias/equacoes-preveem-evolucao-no-tamanho-de-anfibios/. Acesso em: 29 jul. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Propor uma discussão a respeito desse texto e aproveitar para trazer a preservação da fauna e flora brasileiras como tópico a ser debatido, refletindo de que maneira o desmatamento interfere no hábitat dos animais. Esse trabalho pode ser realizado em parceria com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e de Geografia. No *site* do Ministério do Meio Ambiente é possível obter informações estatísticas do desmatamento da Amazônia Legal, disponível em <https://www.mma.gov.br/mma-em-numeros/desmatamento> (acesso em: 29 jul. 2020). Também podem-se apresentar artigos envolvendo esse tema, como o disponível em <https://www.nexojornal.com.br/academico/2020/02/19/Como-o-desmatamento-da-Amaz%C3%B4nia-afeta-os-animais-aqu%C3%A1ticos> (acesso em: 30 jul. 2020). Esse tipo de atividade envolve os Temas Contemporâneos Transversais **Ciência e Tecnologia** e **Educação Ambiental**.

Ao trazer esse tipo de discussão para a sala de aula, os estudantes conseguem verificar como conceitos da Matemática podem ser utilizados para interpretar situações envolvendo a vida no planeta. Com base em debates realizados, os estudantes podem estabelecer opiniões e fundamentá-las usando pesquisas científicas, colaborando para o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**; também levam os estudantes a desenvolver a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT101**, pois têm contato com textos científicos divulgados por diferentes mídias; por fim, a argumentação com base em fatos e informações, apresentando um ponto de vista, favorece o desenvolvimento da competência geral **7**.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas contemplam os conceitos de função e equação modulares. Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar as dúvidas.

É importante recordar com os estudantes que o estudo do sinal de uma função consiste em determinar quando a função se anula, os intervalos nos quais a função possui valores negativos e os intervalos nos quais a função possui valores positivos. Esses valores dependem unicamente da variável e da lei de formação da função.

O estudo do sinal de uma função determina os valores reais de x para que:

- a função se anule ($y = 0$);
- a função seja positiva ($y > 0$);
- a função seja negativa ($y < 0$).

Caso os estudantes identifiquem outro modo de resolver alguma das atividades apresentadas, pedir que socializem com a turma. É importante que eles exercitem a prática de pensar em mais de uma maneira de resolver determinada atividade, pois, assim, eles relembram os conceitos estudados e desenvolvem a criatividade.

Na atividade resolvida **10**, comentar que é possível usar o fato de que o gráfico da função definida por $g(x) = x^2 - 4$ é uma translação vertical de -4 unidades do gráfico de $h(x) = x^2$. Com base no primeiro gráfico da página **46**, concluir que é preciso refletir em torno do eixo Ox o trecho em que o sinal de g é negativo. Verificar com qual tipo de resolução os estudantes mais se familiarizam nesse caso.

Nas atividades os estudantes vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar diferentes situações, desenvolvendo a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, e estarão utilizando diferentes registros de representação matemática, como o algébrico e o gráfico, desenvolvendo a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Como sugestão, propor aos estudantes que elaborem alguma situação-problema em que podem utilizar a ideia de módulo ou de função modular. Depois, pedir a eles que se reúnam em dupla para que um resolva a situação-problema elaborada pelo outro e, finalmente, confiram juntos as resoluções.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Novamente é utilizado o *software* de geometria dinâmica **GeoGebra** para auxiliar os estudantes a determinar soluções gráficas a partir de conceitos algébricos. Nesse tópico, trabalha-se a construção de representações gráficas de funções polinomiais de 1º grau no plano cartesiano para resolver equações modulares. Ao utilizar diferentes linguagens para solucionar problemas, os estudantes desenvolvem a competência geral **4**, e a competência específica **4** da área de **Matemática de suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT401**. Atividades como essa ajudam a desenvolver o pensamento computacional dos estudantes.

> [...]
>
> Jeanette Wing, atualmente professora em Carnegie Mellon e vice-presidente da Microsoft Research, definiu o pensamento computacional como a **formulação de problemas e soluções** representados de forma que possam ser executados por processadores de informações – humanos, computadores ou, melhor ainda, uma combinação de ambos.
>
> Portanto, apesar de não estar completamente relacionado ao pensamento computacional, **o computador é uma importante ferramenta para a otimização de tarefas**, sobretudo nas etapas que envolvem sequências de ações que podem ser previstas.
>
> Wing caracteriza o **pensamento computacional** com os seguintes elementos:
>
> - Conceptualização (organização dos conceitos) e não programação;
> - Habilidade fundamental, não mecânica;
> - Uma forma que humanos, não computadores, pensam;
> - Um pensamento complemento e que combina pensamento matemático e de engenharia;
> - Composto por ideias, não somente *software* e *hardware*;
> - Para todas as pessoas, em todos os lugares.
>
> [...]
>
> INSTITUTO AYRTON SENNA. **Pensamento computacional e programação como ferramentas de aprendizagem**. São Paulo, 13 set. 2019. Disponível em: https://institutoayrtonsenna.org.br/pt-br/meu-educador-meu-idolo/materialdeeducacao/pensamento-computacional-e-programacao-como-ferramentas-de-aprendizagem.html. Acesso em: 30 jul. 2020.

A BNCC relaciona o desenvolvimento do pensamento computacional dos estudantes à capacidade de traduzir uma situação dada em outras linguagens.

> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos.
>
> BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, DF, 2018. p. 271.

Desse modo, as tecnologias digitais apresentam grande importância no desenvolvimento do pensamento computacional, sendo utilizadas para realizar trabalhos com o auxílio de calculadoras, planilhas eletrônicas, *softwares* de geometria dinâmica, entre outros.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Convém proporcionar aos estudantes momentos em que eles possam retomar conceitos estudados anteriormente e sistematizar as informações de diferentes maneiras, como por meio de um esquema ou mapa mental e pela elaboração de um fluxograma com as palavras-chave.

Para resolver os itens da atividade proposta nessa seção, os estudantes escrevem cada lado da igualdade da equação modular como função polinomial do 1º grau e constroem o gráfico dessas funções. A seguir, a análise de cada item.

a) $|2x - 1| = 5$

Considerando $f(x) = |2x - 1|$ e $g(x) = 5$, os estudantes devem encontrar dois pontos de intersecção dos gráficos dessas funções: em $x = -2$ e $x = 3$. Portanto, $S = \{-2, 3\}$.

b) $|x + 3| = 2x + 1$

Considerando $f(x) = |x + 3|$ e $g(x) = 2x + 1$, os estudantes devem encontrar apenas um ponto de intersecção dos gráficos dessas funções: em $x = 2$. Portanto, $S = \{2\}$.

c) $|2x - 1| = |2x + 3|$

Considerando $f(x) = |2x - 1|$ e $g(x) = |2x + 3|$, os estudantes devem encontrar apenas um ponto de intersecção dos gráficos dessas funções: em $x = -\frac{1}{2}$. Portanto, $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Como sugestão de tarefa, propor aos estudantes a seguinte atividade em dupla: escolher uma função modular e esboçá-la no **GeoGebra**; pedir a um colega que tente descobrir a lei de formação da função que representa o gráfico traçado. Assim, os estudantes exercitam a criatividade e reveem conceitos estudados no Capítulo. Também estão desenvolvendo a competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Esta seção possibilita a aplicação e o aprofundamento dos conceitos estudados neste Capítulo por meio de atividades de diversos exames de vestibulares do país. Elas podem ser desenvolvidas como tarefa ou complementando as atividades propostas em sala de aula. Também é possível utilizá-las como verificação do entendimento dos conceitos abordados no Capítulo.

Por mais que essas atividades tenham alternativas contendo a resposta correta, é importante que os estudantes sejam capazes de justificar a escolha feita e explicar o porquê de as outras estarem erradas. Para auxiliar a correção, pode-se propor aos estudantes que utilizem o **GeoGebra** para conferir determinadas respostas. Assim, eles colocam em prática o que foi estudado nas seções **Explorando a tecnologia**. Recomenda-se que as atividades desta seção sejam resolvidas em grupo e que as resoluções sejam socializadas com a turma, de modo que os estudantes possam exercitar a capacidade de levantar hipóteses, validá-las e justificá-las coletivamente. Esse trabalho, desenvolvido em grupo, pode também figurar como uma avaliação do processo de aprendizagem dos estudantes, no qual eles poderão verificar se precisam retomar algum conceito que necessite ser mais bem trabalhado, bem como esclarecer dúvidas.

PARA REFLETIR

Os questionamentos propostos nesta seção auxiliam os estudantes a refletir a respeito dos conceitos matemáticos estudados no Capítulo e retomá-los, bem como fazer uma análise pessoal do que eles aprenderam e como esse aprendizado influencia a vida deles. É um ótimo momento para relembrar os estudantes das discussões realizadas durante as aulas que envolveram a Matemática contextualizada em diversas situações, entre elas, a aplicação na área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Após responderem aos questionamentos, é importante que compartilhem as respostas, pois isso ajuda a enriquecer o repertório dos estudantes com situações em que a Matemática é aplicada. Ao ouvir a explicação de um colega, espera-se que os estudantes consigam formar uma opinião e avaliar se o que foi dito apresenta alguma imprecisão conceitual.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 2

Função exponencial

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listado o Tema Contemporâneo Transversal trabalhado. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156, 157 e 158 deste livro.

- **Competências gerais:** 1, 2, 4, 5, 7 e 8
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 1: **EM13MAT103**
  - Competência específica 2: **EM13MAT203**
  - Competência específica 3: **EM13MAT303**, **EM13MAT304** e **EM13MAT313**
  - Competência específica 4: **EM13MAT403**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 1
  - Competência específica 3
- **Tema Contemporâneo Transversal**
  - Ciência e Tecnologia

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

Estudar as aplicações de funções exponenciais em situações reais contribui para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos relacionados a esse tema. Para isso, este Capítulo traz exemplos de aplicações da função exponencial na área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, explorando, por exemplo, a saúde, a radioatividade e situações socioeconômicas. É importante que os estudantes percebam que essas aplicações podem ocorrer em diferentes campos, como em Matemática Financeira, ao tratar de juro composto, e em Geografia, ao analisar o crescimento populacional. Por causa da grande aplicabilidade da função exponencial em diferentes contextos, é possível desenvolver o conceito desse tipo de função, explorar a lei de formação e analisar a representação gráfica com base em situações-problema trazidas pelos estudantes ou encontradas nos meios de comunicação.

É interessante enfatizar que as funções exponenciais são importantes ferramentas para a solução de vários problemas que necessitam descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento da variável independente ocorre exponencialmente e que, neste Capítulo, serão retomadas as propriedades de potenciação antes de definir formalmente a função exponencial.

Sugere-se pedir aos estudantes que leiam o texto inicial e observem as imagens apresentadas do bairro da Liberdade, em São Paulo (SP), e comentem o que elas significam. Espera-se que os estudantes comentem que, por causa da quarentena, o movimento nas ruas diminuiu muito e locais tradicionais de comércio, como o bairro da Liberdade, ficaram vazios durante

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

esse período. Estimular a troca de ideias sobre como ficaram as ruas que costumam ter bastante movimento na cidade dos estudantes. Em seguida, pedir que observem o gráfico que expressa os casos acumulados de covid-19 por data de notificação no Brasil. Espera-se que eles consigam identificar a variável dependente e a variável independente dessa situação ao observar o comportamento do gráfico.

O texto de abertura propõe uma reflexão das consequências da transmissão de covid-19 e faz menção ao crescimento exponencial. Nesse momento, é importante destacar a presença da Matemática no acompanhamento da evolução da pandemia.

As questões da abertura têm o objetivo de discutir o contexto apresentado nas imagens e na leitura do texto. A atividade **1** solicita uma pesquisa a respeito da doença covid-19. É interessante propor aos estudantes que pesquisem a diferença entre os termos covid-19 e coronavírus; o primeiro refere-se à doença respiratória e o segundo, ao causador da doença. É esperado que os estudantes saibam que a covid-19 é uma doença respiratória, uma vez que isso consta na sigla em inglês. Após a pesquisa, reservar um momento para que os estudantes compartilhem as informações obtidas e conversem a respeito das consequências de uma pandemia para a população, como sugere a atividade **2**, sobre a importância de se prevenir contra doenças que se propagam por vírus e de tomar as vacinas existentes necessárias.

Pandemia é a disseminação de uma doença em escala mundial. A quarentena é uma forma de evitar que o vírus da covid-19 se espalhe ainda mais, pois, com as pessoas fora de circulação, naturalmente, há um menor número de contágio, o que ajuda a não sobrecarregar o sistema de saúde, que não tem capacidade para atender todos os infectados ao mesmo tempo. É interessante falar a respeito de outras pandemias que foram registradas na história da humanidade. O *link* <https://revistagalileu.globo.com/Ciencia/Saude/noticia/2020/03/conheca-5-maiores-pandemias-da-historia.html> (acesso em: 1º ago. 2020) apresenta alguns exemplos de pandemias. Esse é um tema relacionado à competência específica **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, que pode ser discutido em parceria com os professores dessa área.

A atividade **3** sugere a leitura e a interpretação do gráfico de casos acumulados de covid-19 no Brasil por data de notificação. No item **a** é esperado que os estudantes percebam o crescimento rápido a partir de uma certa data, que não constitui uma reta, a frequência das datas e que a curva é crescente. Eles podem comparar o gráfico a outros tipos de gráficos que conheçam, incluindo de funções polinomiais. Analisando o gráfico, a curva cresce rapidamente a partir do dia 27/3 e apresenta um comportamento exponencial. Espera-se, ainda, que os estudantes afirmem que a curva não apresenta crescimento linear, pois não forma uma reta e a taxa de crescimento não é constante nem igual à da função polinomial do 2º grau. Para aprofundar a relação entre a covid-19 e a função exponencial, consultar o *site* **Coronaviz**, disponível em <http://www.visgraf.impa.br/coronaviz/> (acesso em: 31 jul. 2020). Esse *site* foi idealizado pelo Visgraf do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (Impa), um laboratório com foco em pesquisa e desenvolvimento de novas mídias, que tem por objetivo a divulgação científica. Nele, é possível encontrar informações corretas sobre o vírus e como esses dados se relacionam com a Matemática.

A seguinte notícia foi disponibilizada no *site* do Impa e divulga o laboratório:

> Desde que a situação da Covid-19 se agravou no Brasil e no mundo, gráficos sobre a evolução da doença e seus desdobramentos têm sido divulgados em massa à população, interessada em vislumbrar possíveis cenários para a pandemia. Quando bem executada, a visualização de dados sobre o novo coronavírus pode auxiliar autoridades na criação de políticas públicas e conscientizar a sociedade, influenciando seu comportamento.
>
> Reconhecendo a função essencial que ela executa na comunicação, o Visgraf (Laboratório de Computação Gráfica do IMPA) lança o "Coronaviz: visualização em tempos de Coronavírus"; a iniciativa tratará o tema sob a perspectiva da matemática e do *design* de informação através de um portal, relatórios técnicos e artigos científicos.
>
> [...]
>
> VISGRAF lança projeto sobre visualização de dados da covid. **Impa,** 21 maio 2020. Disponível em: https://impa.br/noticias/visgraf-lanca-projeto-sobre-visualizacao-de-dados-da-covid-19/. Acesso em: 31 jul. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Caso não seja possível reservar um momento para acessar o *site* do laboratório do Impa, é recomendado ler com os estudantes as informações do texto disponível em <https://www.visgraf.impa.br/coronaviz/contextualizacao-do-problema> (acesso em: 31 jul. 2020.), que relaciona os conceitos matemáticos e a covid-19. É esperado que os estudantes percebam que o crescimento do gráfico da abertura do Capítulo é exponencial e não linear, consequentemente, a representação gráfica não é uma reta, pois a taxa de crescimento não é constante.

Conversar com os estudantes a respeito do uso responsável de dados estatísticos de certo assunto. Em uma pandemia, são necessárias informações consistentes e, principalmente, fontes confiáveis. Muitas informações são disponibilizadas nos veículos de comunicação por meio de gráficos. Os estudantes precisam criar um olhar crítico com relação a essas informações, verificando se, de fato, foram obtidas a partir de uma coleta de dados consistente. O texto a seguir traz uma reflexão sobre isso.

> [...]
>
> O uso responsável da visualização de dados possui duas facetas: a primeira diz respeito à proveniência, qualidade e transparência dos dados; a segunda diz respeito aos desafios que conceitos complexos e fenômenos incertos e/ou incompletos impõem à representação visual.
>
> [...] a pandemia aponta alguns desafios para a representação visual de dados: como explicar e descrever o crescimento exponencial de forma clara e acessível? Como comparar a propagação do vírus em diferentes países de modo correto? Como explicar visualmente a incerteza em números como contagem de casos quando nem sempre os testes realizados são suficientes para torná-los indicadores confiáveis de casos reais? Ao invés de reduzir a complexidade do fenômeno, os bons exemplos de visualizações criados até o momento valem-se de convenções visuais específicas para o contexto, bem como fazem uso recorrente de anotações e ressalvas.
>
> GIANNELLA, J.; VELHO, L. **Visualização em tempos de coronavírus**: parte 1. Rio de Janeiro: Visgraf, maio 2020. Disponível em: https://www.visgraf.impa.br/Data/RefBib/PS_PDF/tr-07-2020/tr-07-2020.pdf. Acesso em: 31 jul. 2020.

Perguntar aos estudantes de que maneira é possível identificar a veracidade de informações que são apresentadas em diferentes meios de comunicação. Espera-se que eles percebam que, para realizar essa verificação, é necessário conhecer os conceitos matemáticos que se relacionam com essas informações e interpretá-las.

A atividade **4** propõe aos estudantes que pesquisem ações que servem de prevenção ao coronavírus. O *site* do Ministério da Saúde apresenta algumas dessas medidas no *link* <http://coronavirus.saude.gov.br/sobre-a-doenca#como-se-proteger> (acesso em: 1º ago. 2020). São medidas divulgadas para prevenção do coronavírus: lavar sempre as mãos até a altura do punho com água e sabão; utilizar álcool em gel a 70% quando não for possível lavar as mãos; evitar tocar o rosto com mãos não lavadas; higienizar com frequência objetos do dia a dia; evitar contatos físicos; não compartilhar objetos pessoais; manter ambientes limpos e arejados; utilizar máscara caso precise sair. Pode ser feito um trabalho interdisciplinar com os professores dos componentes curriculares Biologia e História sobre outras doenças causadas por vírus que afetaram a humanidade, tipos de epidemia, tipos de doenças e seus causadores, medidas adotadas para combater essas doenças e quão eficientes elas foram etc.

As atividades propostas na abertura do Capítulo e as discussões realizadas acerca da modelagem de uma situação-problema por meio de funções possibilitam o desenvolvimento da competência geral **1** da BNCC e da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT103**. Além disso, trabalha-se com contextos que possibilitam aos estudantes aprimorar o autoconhecimento em relação à saúde física e à emocional, desenvolvendo a competência geral **8**. Trabalha-se, ainda, o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia** de modo a desenvolver nos estudantes a consciência da importância da pesquisa e da ciência para o entendimento de novas doenças, como a covid-19, e no desenvolvimento de possíveis tratamentos.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Introdução

O texto apresenta a importância de alimentos que possuem bactérias em sua composição e traz como exemplo o crescimento de uma população de bactérias e sua relação com a função exponencial.

FÓRUM

Em 2015, foi lançada pela Organização das Nações Unidas (ONU) uma agenda de desenvolvimento sustentável, a ser cumprida até 2030. A agenda é baseada em ações para acabar com a pobreza, promover o bem-estar para todos e proteger o meio ambiente. Dessas ações resultaram 17 Objetivos de Desenvolvimento Sustentável (ODS).

O **Objetivo 2** da Agenda 2030 da ONU, citado neste boxe, é: "acabar com a fome, alcançar a segurança alimentar e melhoria da nutrição e promover a agricultura sustentável".

É importante apresentar o texto deste boxe e propor uma discussão a respeito da perda e do desperdício de alimentos. Para essa discussão, os estudantes devem realizar a pesquisa proposta, a fim de obter informações que vão ajudar a criar opiniões próprias. Recomenda-se auxiliá-los na busca por fontes de informações confiáveis e no desenvolvimento de uma lista de ações que podem contribuir para o cumprimento do Objetivo de Desenvolvimento Sustentável 2 da ONU. Essa discussão contribui para o desenvolvimento das competências gerais **2** e **7**.

Para mais informações sobre a Agenda 2030 da ONU, pode-se acessar os documentos disponíveis em <https://nacoesunidas.org/pos2015/agenda2030/> (acesso em: 23 ago. 2020).

Potenciação e radiciação

Nesse tópico, propõe-se a revisão dos conceitos de potenciação e radiação para que os estudantes possam aplicar as propriedades dessas operações ao estudar a função exponencial. Comentar que a potenciação é bastante importante para o estudo da função exponencial.

Destacar o uso da calculadora como facilitadora de cálculos envolvendo potenciação e radiciação. Caso os estudantes não saibam utilizar uma calculadora científica, é importante que seja dedicado um tempo da aula para mostrar suas funcionalidades, uma vez que ela será usada ao longo do Capítulo.

No tópico **Propriedades da potenciação**, é importante verificar se os estudantes cometem erros ao aplicar essas propriedades. Algumas pesquisas acadêmicas buscam analisar os principais erros dos estudantes na resolução de atividades que envolvem conceitos e aplicação de propriedades de potenciação e radiciação. A seguir estão indicados alguns desses erros.

- O estudante não considera o sinal negativo da base ao elevá-lo a um expoente par, escrevendo, de maneira equivocada, por exemplo, $(-2)^4 = -(2)^4$;
- Ao multiplicar potências de mesma base, o estudante equivocadamente multiplica as bases e multiplica os expoentes; por exemplo: $2^4 \cdot 2^3 = 4^{12}$;
- Ao resolver uma potência de potência, o estudante adiciona os expoentes; por exemplo $(2^3)^5 = 2^8$;

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- O estudante, de maneira equivocada, mantém a base ao elevar um número a zero; por exemplo: $9^0 = 9$.

Fontes de pesquisa: FELTES, R. Z. **Análise de erros em potenciação e radiciação**: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio. Dissertação (Mestrado em Ciências e Matemática) – Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007. Disponível em: http://tede2.pucrs.br/tede2/bitstream/tede/3438/1/388459.pdf. Acesso em: 1º ago. 2020.

PAIAS, A. M. **Diagnóstico dos erros sobre a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009. Disponível em: https://tede2.pucsp.br/bitstream/handle/11385/1/Ana%20Maria%20Paias.pdf. Acesso em: 1º ago. 2020.

Ao identificar erros cometidos pelos estudantes, é importante conscientizá-los de que erros não significam algo negativo, mas podem ser utilizados para retomar os conceitos e ajudar a compreender o que os levou a cometê-los.

Se necessário, retomar com os estudantes a nomenclatura que costuma ser utilizada para se referir a cada uma das propriedades da potenciação:

1ª) Propriedade da multiplicação de potências de mesma base
2ª) Propriedade da divisão de potências de mesma base
3ª) Propriedade da potência de potência
4ª) Propriedade da potência de um produto
5ª) Propriedade da potência de um quociente

O tópico **Notação científica** apresenta este conceito ao estudante para que ele possa compreender a estrutura de formação dessa notação e sua relação com a potenciação. Desse modo, inicia-se o trabalho indicado na competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT313**.

Comentar que, em alguns contextos, como ao trabalhar com carga elétrica no componente curricular Física, da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, esses valores podem ser negativos, pois, neste caso, o sinal negativo indica que a carga é de um elétron, que por convenção, tem sinal negativo. Ao expressar a carga elétrica de prótons, usa-se o sinal positivo.

O boxe **Para assistir** propõe um tema atual: a nanotecnologia. Abordar esse tema relacionando-o ao conceito de notação científica é a proposta do boxe **Pense e responda**. Pode ser realizado um trabalho com a área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**, visando identificar em quais áreas de estudo a nanotecnologia está presente. Para complementar esse tema, o texto a seguir aborda uma iniciativa de nanotecnologia no Brasil. É importante que os estudantes conheçam tais iniciativas e reconheçam que os conceitos de Matemática podem ser utilizados para interpretar diferentes situações, como descreve a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT103**.

[...]

Nanotubos de carbono e grafeno são os materiais mais estudados na nanotecnologia, campo da ciência que atua na nanoescala. É nessas dimensões ínfimas que físicos, químicos, engenheiros, biólogos, entre outros profissionais, trabalham para desenvolver dispositivos e tecnologias que já estão revolucionando áreas como óleo e gás, geração e armazenamento de energia, medicina, eletroeletrônica, entre outras. Por exemplo: os televisores de "pontos quânticos" que estão na moda atualmente. São nanopartículas de semicondutores que permitem a formação de imagem com qualidade de cor e contraste inatingíveis por telas LED ou LCD comuns.

Algo relativamente moderno para os padrões da ciência, a nanotecnologia explodiu no mundo no início do século, com a diminuição nos custos de produção dos nanotubos de carbono e outros nanomateriais (como as nanopartículas de prata, utilizadas como bactericidas desde palmilhas de calçados até equipamentos hospitalares). No Brasil, a nanotecnologia está dando seus primeiros passos fora do ambiente acadêmico dos laboratórios de pesquisa. Surgem iniciativas para a produção de nanomateriais em larga escala e alguns desenvolvimentos começam a chegar ao mercado.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Entre essas iniciativas, destaca-se o Centro de Tecnologia em Nanomateriais e Grafeno – CTNano, iniciativa de um grupo de professores da UFMG e que opera em um edifício de 3.000 m² de área, no Parque Tecnológico de Belo Horizonte – BHTec. O CTNano/UFMG é o maior produtor de nanotubos de carbono do Brasil. Atua atendendo a demandas da iniciativa privada, visando a aplicação de nanotecnologia na solução de problemas e no desenvolvimento de novos produtos. Um modelo de parceria público-privada ainda pouco explorado no Brasil, que busca fazer com que o conhecimento gerado nas universidades com anos de investimento do Estado chegue ao mercado, gerando postos de trabalho, riqueza e desenvolvimento ao país.

[...]

NO BLOG Ciência & Matemática, a importância da nanotecnologia. **Impa**, 5 nov. 2019. Disponível em: https://impa.br/noticias/no-blog-ciencia-e-matematica-a-importancia-da-nanotecnologia/. Acesso em: 1º ago. 2020.

No tópico **Radiciação**, os estudantes retomam conceitos de radiciação, em geral vistos no Ensino Fundamental. Após explorar a definição, procurar desenvolver as propriedades dos radicais, explicando como elas auxiliam na resolução dos cálculos envolvendo radiciação e potenciação de expoentes fracionários.

Se necessário, retomar com os estudantes a nomenclatura utilizada para a radiciação: o símbolo $\sqrt[n]{a}$ é o radical, a é o radicando e n é o índice.

Assim como foi mencionado em potenciação, os erros podem orientar o trabalho pedagógico desenvolvendo os conceitos nos estudantes. A seguir são apresentados exemplos de erros corriqueiros que os estudantes costumam cometer ao trabalhar com as propriedades dos radicais.

- Realizar os cálculos considerando o índice como sendo 2, independentemente de qual seja, por exemplo: $\sqrt[3]{125} = \sqrt{5^3}$.
- Extrair a raiz, mas manter o radical, por exemplo: $\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{-2}$.
- Desconsiderar o índice do radical, por exemplo: $\sqrt[3]{2^6} = 64$.
- Desconsiderar o sinal do radicando, por exemplo: $\sqrt[3]{-8} = 2$.
- Considerar o índice do radical como expoente do resultado, por exemplo: $\sqrt[3]{27} = 3^3$.

Fonte de pesquisa: LOPES, A. C. M. **O ensino de radicais por Atividades**. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Estado do Pará, Belém, 2015. Disponível em: http://ccse.uepa.br/ppged/wp-content/uploads/dissertacoes/09/adrielle_Cristine_mendello_lopes.pdf. Acesso em: 1º ago. 2020.

Ao desenvolver o tópico **Potência com expoente real**, explicar que existem diversos métodos para calcular a raiz não exata de um número.

No tópico **Calculando com o auxílio de uma calculadora**, é importante incentivar os estudantes a utilizar a calculadora como ferramenta de verificação de resultados, independentemente de os valores serem exatos ou não. Ao comparar maneiras de resolver as atividades, os estudantes têm contato com diferentes estratégias de resolução de um mesmo problema, comparando e avaliando o método mais adequado para encontrar a solução.

O uso de calculadora como recurso didático é assunto que vem sendo discutido e estudado há muitos anos, como é o caso do texto a seguir, que trata desse assunto.

A calculadora e o processo de ensino-aprendizagem

A utilização educativa das calculadoras entrou finalmente na ordem do dia.

As calculadoras são objectos matemáticos por excelência que o desenvolvimento tecnológico se encarregou de tomar em objectos de uso corrente. Fazem já parte da vida de todos os dias.

Entre os professores, existe manifestamente uma forte onda de interesse pelas suas aplicações. Os projectos de novos currículos que têm sido divulgados fazem-lhes referência apontando de diversos modos a sua importância como meios auxiliares de ensino.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A utilização normal da calculadora nas aulas, nos testes, e em outras actividades, em todos os níveis de escolaridade, poderá constituir um importante factor de melhoria do ensino da Matemática aproximando a nossa disciplina das outras matérias escolares e da vida prática, suscitando o interesse dos alunos, alargando e diversificando as actividades de ensino-aprendizagem.

A máquina de calcular é um instrumento rico de potencialidades para a disciplina de Matemática.

Ela pode ser utilizada para apoiar o desenvolvimento de novos conceitos, para formular conjecturas e explorar relações matemáticas, e para resolver problemas. A calculadora proporciona a exploração de novas estratégias e métodos de trabalho, como a tentativa e erro e as aproximações sucessivas. Permite alargar o leque de situações a considerar, usando valores retirados directamente de problemas da vida real, sem se ser submergido pelos cálculos. A calculadora é ela própria uma fonte natural de novos problemas e novos conceitos, como os de arredondamento, aproximação e convergência.

[...]

PONTE, J. P. A calculadora e o processo de ensino-aprendizagem. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 11, p. 1-2, 3º trim. 1989. Disponível em: http://www.apm.pt/files/_EM11_pp01-02_4a2d0783498f9.pdf. Acesso em: 1º ago. 2020.

O uso das tecnologias pode tornar as aulas mais dinâmicas e auxiliar a exploração de diferentes conceitos matemáticos. Reforçar a indicação do **Saiba que...** e verificar se as calculadoras utilizadas pelos estudantes têm diferenças na ordem em que as teclas precisam ser pressionadas. Se sim, é interessante solicitar que investiguem seu funcionamento e compartilhem com os colegas, promovendo a troca mútua de conhecimentos e estimulando a aprendizagem por pares. Atualmente a maioria dos computadores e *smartphones* possuem a opção de calculadora científica em seus sistemas operacionais.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

Essas atividades contemplam os conceitos de potenciação e radiciação. É importante explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas.

Ao desenvolver a atividade resolvida **3**, pode-se relembrar os estudantes do padrão encontrado ao trabalhar com potência de base 10, pedindo a eles que escrevam algumas dessas potências com expoentes negativos e positivos e descrevam o que observam em relação à quantidade de casas decimais da potência.

As atividades propostas auxiliam os estudantes na compreensão dos conceitos de potenciação e radiciação. Se considerar oportuno, propor que as atividades sejam resolvidas em duplas, para que os estudantes possam compartilhar estratégias de resolução e sanar dúvidas. Também é possível solicitar que elaborem um esquema com as propriedades estudadas antes de resolver essas atividades.

Na atividade **10**, verificar se os estudantes percebem que a expressão é formada por adições e subtrações de potências de mesma base. Portanto, eles não devem aplicar imediatamente as propriedades de potenciação utilizadas para multiplicação e divisão de potências de mesma base. Essa atividade pode ser resolvida colocando 3^{10} em evidência tanto no numerador quanto no denominador e simplificando os resultados. Caso algum estudante consiga resolver de outra maneira, é importante que ele compartilhe as estratégias utilizadas para verificar os conceitos aplicados por ele.

A atividade **13** apresenta uma expressão resolvida de maneira errada em que os estudantes precisam identificar o erro. Para ampliar esse tipo de atividade, propor a cada estudante que elabore uma expressão numérica, inspirado nessa atividade, e a resolva de maneira errada para que um colega tente identificar onde está o erro, enquanto ele faz o mesmo com a expressão resolvida que receber.

Acessar o *link* <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/4972/2/LD_PPGMAT_M_Melo_Marcela_Camila_Picin_de_2020_1.pdf> (acesso em: 1º ago. 2020) para conhecer um material que utiliza a resolução de problemas como meio para explorar a potenciação e a radiciação nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Esse material pode ser utilizado como retomada dos conceitos estudados para consolidar o aprendizado.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Função exponencial

Nesse tópico é apresentado o conceito de função exponencial de modo que o estudante seja capaz de resolver problemas que envolvem grandezas relacionadas à função exponencial em diversos contextos, desenvolvendo a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT304**, e também a análise e as representações de funções exponenciais, com ou sem o apoio de tecnologias, desenvolvendo a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT403**.

Comentar que as funções exponenciais estão entre os modelos matemáticos mais utilizados para resolver problemas e pedir aos estudantes que apresentem exemplos de situações que envolvam esse tipo de função. É um bom momento para analisar os conhecimentos prévios deles, verificando o que entendem sobre variáveis dependentes, variáveis independentes e crescimento exponencial, retomando a abertura do Capítulo.

A disseminação de uma doença infecciosa acontece pelo contágio. Quando ocorre certo número de casos da doença controlados em determinada região, tem-se uma endemia; quando a incidência do número de casos está acima do esperado e afeta vários países e continentes, tem-se uma pandemia.

Recordar também o crescimento exponencial das bactérias do leite fermentado. É importante que os estudantes não confundam bactérias com vírus. Entre outras diferenças, as bactérias são capazes de se multiplicar fora de uma célula viva, enquanto os vírus se multiplicam apenas em células vivas.

A função exponencial é usada para descrever a variação de duas grandezas em que o crescimento ou o decrescimento da variável dependente pode ser modelado por uma lei da função do tipo $y = a^x$. Com a função exponencial é possível estimar o crescimento populacional, determinar a desvalorização de bens, fazer estimativas de quanto certo investimento vai render, entre outras situações.

O tópico **Gráfico da função exponencial** apresenta exemplos dessa função e sua representação gráfica. Durante a apresentação dos gráficos de $g(x) = 2^x$ e $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, propor as seguintes questões: "O que acontece, em cada função, com os valores de y quando x aumenta?", "Comparando os dois gráficos, podemos afirmar que a base da função exponencial determina o fato de ela ser crescente ou decrescente?". Espera-se que os estudantes percebam que, conforme aumenta o valor de x, o valor de g também aumenta, enquanto o valor de h diminui. Em nenhum dos casos o valor da função é 0, conforme mencionado no boxe **Saiba que...** desse tópico. Ao explorar o boxe **Pense e responda**, se necessário, retomar a ideia de simetria.

Se possível, apresentar em sala de aula o recurso digital indicado no boxe **Para ouvir**. Trata-se de um áudio em que um apresentador conversa com os convidados a respeito do termo exponencial. Caso não seja possível propor esse áudio em sala, solicitar aos estudantes que o ouçam em casa e anotem as impressões que tiveram, trazendo-as para a aula seguinte, a fim de realizar uma discussão do tema.

No tópico **A função $f(x) = e^x$**, é importante verificar se os estudantes compreenderam o significado do número e, como é apresentado no boxe **Saiba que...** desse tópico. Analisar o gráfico da função com os estudantes e auxiliá-los a responder às perguntas do boxe **Pense e responda**. Para saber mais sobre a abordagem do número e no ensino básico, consultar o artigo de Wagner M. Pommer, **O número de Euler: possíveis abordagens no ensino básico**, que está disponível em <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100831.pdf> (acesso em: 23 ago. 2020).

No segundo boxe **Pense e responda**, é interessante verificar se os estudantes conseguem identificar que $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

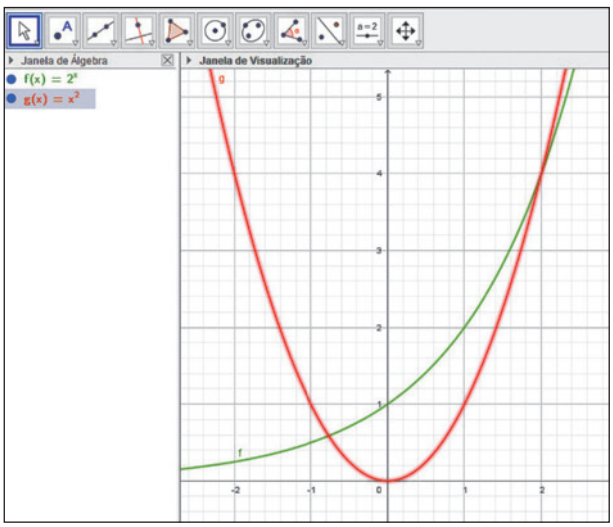
A resolução de problemas com funções exponenciais ajuda a compreender e a interpretar as variáveis das grandezas envolvidas, desenvolvendo a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT304**.

É importante explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções dessas atividades para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas. É oportuno recordar os estudantes da importância da representação gráfica para observar o comportamento das variáveis: em uma função dada por $f(x) = a^x$, se $a > 1$, f é crescente e se $0 < a < 1$, f é decrescente. Assim, quando a função é decrescente, os valores de y se aproximam de 0 à medida que o valor de x cresce; quando a função é crescente, se x cresce, y também cresce.

Caso algum estudante encontre outra maneira de apresentar a resolução da atividade resolvida **8**, pedir que compartilhe com a turma o raciocínio utilizado. Isso também é recomendado ao responderem à questão do boxe **Pense e responda**.

As atividades propostas auxiliam os estudantes na compreensão dos conceitos de função exponencial. São trabalhadas construções de representações algébricas de funções exponenciais no plano cartesiano, recorrendo a *softwares* ou de geometria dinâmica ou planilhas eletrônicas, possibilitando o desenvolvimento da competência geral **4** da BNCC, bem como da competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT403**.

Recomendar aos estudantes que representem os gráficos com cuidado, reproduzindo as características observadas da função apresentada em cada situação. Caso ocorra de eles representarem os gráficos de funções exponenciais como se fossem arcos de parábola, é necessário retomar a definição de função exponencial e compará-la com as funções polinomiais, por exemplo, $f(x) = 2^x$ e $g(x) = x^2$. Isso pode ser observado na imagem a seguir, que mostra os gráficos dessas duas funções construídos no **GeoGebra**.



Para ampliar a atividade **20**, pedir aos estudantes que, após construírem os gráficos, comparem as funções dos itens **a** e **c**, e as funções dos itens **b** e **d**, descrevendo semelhanças e diferenças. Espera-se que eles percebam que o primeiro par de funções é representado por um mesmo gráfico e o segundo par é de funções crescentes representadas por gráficos diferentes, uma vez que a função do item **b** tem crescimento mais rápido do que o da função do item **d**. Esse tipo de comparação também pode ser verificado usando o **GeoGebra**, conforme será proposto, mais adiante, na seção **Explorando a tecnologia**.

A atividade **21** possibilita aos estudantes comparar duas funções e compreender a ideia de crescimento linear e crescimento exponencial. Para ampliar essa atividade, pode-se propor a seguinte questão: "Outro estudante distraído copiou $f(t) = 2^{-t}$. Esboce o gráfico dessa função e compare-o com os gráficos anteriores. O que você observa no crescimento dessas duas funções?". Espera-se que os estudantes concluam que a função $y = 2^t$ é crescente e a função $y = 2^{-t}$ é decrescente.

Na atividade **25**, orientar os estudantes a usar uma planilha eletrônica, por exemplo, **Calc**, do Libre Office.

Como o contexto da atividade é Matemática Financeira, recomenda-se que sejam utilizadas planilhas para analisar melhor as informações da situação-problema. Para isso, os estudantes precisam considerar os dados do enunciado: 300 meses de uma poupança com um capital inicial de R$ 1.000,00 e rendimento de 0,35% ao mês no regime de juro composto e, depois, no regime de juro simples.

Ao utilizar a tecnologia para aplicar conceitos matemáticos no planejamento, na execução e na análise de ações envolvendo a utilização de aplicativos e a criação de planilhas para simular o cálculo de juro simples e composto, os estudantes desenvolvem a competência específica **2** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT203**. Ao interpretar e comparar situações que envolvem juro simples com as que envolvem juro composto, por meio de representações gráficas ou análise de planilhas, destacando o crescimento linear ou exponencial de cada caso, os estudantes estão desenvolvendo a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT303**.

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Nesse tópico, trabalha-se a construção de representações gráficas de funções exponenciais no plano cartesiano, recorrendo a *softwares*, no caso o **GeoGebra**, possibilitando o desenvolvimento da competência geral **5** da BNCC e da competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT403**.

Neste caso, utiliza-se o **GeoGebra** para analisar a influência da base a da potenciação no gráfico da função exponencial. Espera-se que os estudantes possam compreender como a curva exponencial se comporta ao variar o valor da base a na função dada por $f(x) = a^x$.

Na atividade **1** os estudantes vão mover o **Controle deslizante** do **GeoGebra** e verificar o que acontece com o gráfico ao alterar o valor de a. A seguir, estão as respostas esperadas para cada item dessa atividade.

a) Quando $a < 0$, nenhum gráfico é exibido na tela do **GeoGebra**, pois $a < 0$ não é um valor válido para essa função. A definição apresentada de função exponencial diz que a deve ser maior do que 0 e diferente de 1.

b) Quando $0 < a < 1$, o gráfico representa uma função exponencial decrescente.

c) Quando $a = 1$, o gráfico é uma reta paralela ao eixo x, pois $f(x) = 1^x = 1$ e, como mencionado anteriormente, a função exponencial é definida para $a \neq 1$.

d) Quando $a > 1$, o gráfico representa uma função exponencial crescente.

Na atividade **2**, os estudantes vão analisar o comportamento gráfico da função $g(x) = 2^{bx}$. A seguir estão as respostas esperadas para os itens dessa atividade.

a) No caso de $b < 0$, quanto menor for o valor do expoente bx, menor será a potência 2^{bx} e a função é decrescente.

b) No caso de $b > 0$, quanto maior for o valor do expoente bx, maior será a potência 2^{bx} e a função é crescente.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para ampliar essa análise gráfica, pedir aos estudantes que explorem outras variações da função exponencial, por exemplo, $h(x) = a^{x+1}$ e $i(x) = a^x + 1$ e analisem as diferenças ao mover o **Controle deslizante**.

Como vimos, é possível utilizar os recursos do **GeoGebra** e os das planilhas eletrônicas como ferramentas para a representação gráfica de funções exponenciais. No entanto, José Renato P. Coelho faz o seguinte alerta em relação a alguns valores apresentados em planilhas do **GeoGebra** e à definição de função exponencial.

[...]

Nosso objetivo é usar diversos exemplos para fazer os alunos perceberem que uma função dada pela lei $y = a^x$, será do tipo exponencial se, e somente se, $0 < a \neq 1$.

Criaremos nos dois softwares um quadro formado por 10 linhas e 5 colunas como mostra a figura 11. Nas colunas *A* e *B* serão exibidas as comparações de *a* e *x* em relação a 0. Já nas colunas *C* e *D* atribuiremos quaisquer valores para a base *a* e o expoente *x* de modo que satisfaçam as condições explícitas em *A* e *B*. Em *E*2 inserimos a fórmula =C2^D2 (que é equivalente a a^x) e repetimos esse comando nas demais células dessa coluna. Assim veremos o que acontecerá em cada um dos casos indicados nas duas primeiras colunas.

Figura 11 – Planilhas para a compreensão da definição de função exponencial

	A	B	C	D	E
1	Casos		Base	Expoente	Potência
2	a < 0	x > 0	-4	0.5	?
3	a < 0	x = 0	-4	0	1
4	a < 0	x < 0	-4	-0.5	?
5	a = 0	x > 0	0	15	0
6	a = 0	x = 0	0	0	1
7	a = 0	x < 0	0	-15	∞
8	a > 0	x > 0	4	2	16
9	a > 0	x = 0	4	0	1
10	a > 0	x < 0	4	-1	0.25

	A	B	C	D	E
1	Casos		Base	Expoente	Potência
2	a < 0	x > 0	-4	0,5	#NÚM!
3	a < 0	x = 0	-4	0	1
4	a < 0	x < 0	-4	-0,5	#NÚM!
5	a = 0	x > 0	0	15	0
6	a = 0	x = 0	0	0	#NÚM!
7	a = 0	x < 0	0	-15	#DIV/0!
8	a > 0	x > 0	4	2	16
9	a > 0	x = 0	4	0	1
10	a > 0	x < 0	4	-1	0,25

CALC/LIBREOFFICE

Fonte: Autoria própria

Observamos na planilha do GeoGebra, diferentemente do Excel, que as células *E*6 e *E*7 apresentam resultados equivocados para as potências 0^0 e 0^{-15}, sabemos que nesses casos o cálculo é indeterminado. O Excel é o mais indicado para fazer esse tipo de trabalho por não cometer o mesmo equívoco. Nele, a indeterminação é representada pelo código de erro #NÚM! ou #DIV/0!.

É muito importante ficarmos atentos aos *softwares* ou aplicativos utilizados para auxiliar na compreensão de conteúdos da matemática; às vezes, o programa usado pode ter um banco de dados voltado para apresentar resultados que só compreendemos num curso de modalidade superior, cujo nível de complexidade é tão elevado que não cabe explicar no Ensino Básico. Sem essa atenção, um recurso que deveria ser usado para contribuir no processo ensino-aprendizagem, causaria efeito contrário.

[...]

COELHO, J. R. P. **O GeoGebra no ensino das funções exponenciais**. Campos dos Goytacazes: UENF, 2016. Disponível em: http://uenf.br/posgraduacao/matematica/wp-content/uploads/sites/14/2017/09/30052016Jos%C3%A9-Renato-Paveis-Coelho.pdf. Acesso em: 2 ago. 2020.

Equações exponenciais

Optou-se por apresentar os conceitos relacionados às equações exponenciais nesse momento, pois os estudantes, tendo conhecimento de que a função exponencial é injetora, podem compreender melhor o motivo pelo qual igualamos os expoentes em uma equação com bases iguais. Se julgar necessário, recordar com eles as regras para a simplificação das bases, a fim de que utilizem os métodos resolutivos via igualdade de bases ou substituição.

As equações exponenciais podem ser exemplificadas para os estudantes como na situação-problema a seguir.

Um capital de R$ 1.000,00 foi aplicado a uma taxa anual de 20% no regime de juro composto. Após quanto tempo esse capital será igual a R$ 2.073,60?

Resolução

Sendo M o montante (capital inicial + juros), C o capital inicial, t o tempo de aplicação e i a taxa de juros, tem-se:

$M = C \cdot (1 + i)^t$

$2\,073{,}60 = 1\,000(1{,}2)^t \Rightarrow 1{,}2^t = \dfrac{2073{,}60}{1\,000} \Rightarrow 1{,}2^t = 2{,}0736$

Usando o conceito de equação exponencial, é preciso escrever o número 2,0736 na mesma base que 1,2 para igualar as potências. Como $2{,}0736 = 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 1{,}2^4$, tem-se:

$1{,}2^t = 1{,}2^4 \Rightarrow t = 4$

O capital de R$ 2.073,60 será efetivado após 4 anos de aplicação.

Inequações exponenciais

Optou-se por apresentar as inequações exponenciais após os estudantes conhecerem os conceitos de função crescente e decrescente, pois isso auxilia a compreensão da resolução de inequações exponenciais simples (com bases iguais), em que o sinal de desigualdade permanece o mesmo (para bases maiores do que 1) ou se inverte (para bases entre 0 e 1). As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, são desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema e não como objetos de estudo em si mesmas.

CONEXÕES

O trabalho desenvolvido nessa seção valoriza e utiliza conhecimentos para explicar a realidade, levando os estudantes a relacionar fatos a conceitos da função exponencial, por meio de investigação, reflexão e análise crítica, desenvolvendo as competências gerais **1** e **2** da BNCC e as competências específicas **1** e **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Ao utilizar a linguagem matemática para expressar as informações, possibilitando argumentar com base em fatos e dados confiáveis para defender ideias e pontos de vista, os estudantes desenvolvem as competências gerais **4** e **7** da BNCC e a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. O trabalho de interpretação e compreensão de textos científicos a respeito da radioatividade colabora com o desenvolvimento da competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT103.**

É importante esclarecer que as equações exponenciais podem ser usadas na área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** para calcular a meia-vida de uma substância radioativa. O texto a seguir apresenta uma explicação para esse termo.

> [...]
>
> Cada elemento radioativo, seja natural ou obtido artificialmente, se transmuta (se desintegra ou decai) a uma velocidade que lhe é característica.
>
> Para se acompanhar a duração (ou a "vida") de um elemento radioativo, foi preciso estabelecer uma forma de comparação.
>
> Por exemplo, quanto tempo leva para um elemento radioativo ter sua atividade reduzida à metade da atividade inicial? Esse tempo foi denominado **meia-vida** do elemento.
>
> **Meia-vida**, portanto, é o tempo necessário para a atividade de um elemento radioativo ser reduzida à metade da atividade inicial.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

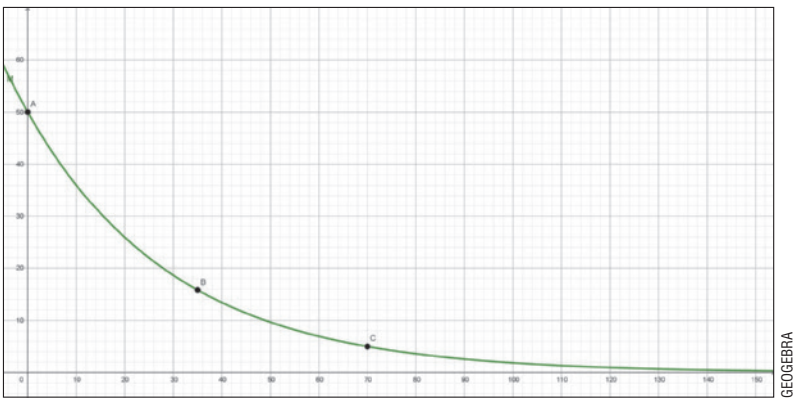
Isso significa que, para cada meia-vida que passa, a atividade vai sendo reduzida à metade da anterior, até atingir um valor insignificante, que não permite mais distinguir suas radiações das do meio ambiente. Dependendo do valor inicial, em muitas fontes radioativas utilizadas em laboratórios de análise e pesquisa, após 10 (dez) meias-vidas, atinge-se esse nível. Entretanto, não se pode confiar totalmente nessa "receita", pois, em várias fontes usadas na indústria e na medicina, mesmo após 10 meias-vidas, a atividade dessas fontes ainda é alta.

CARDOSO, E. de M. Programa de integração CNEN: módulo informação técnica. **CNEN**, 2003. Disponível em: http://www.cnen.gov.br/images/cnen/documentos/educativo/programa-de-informacao-cnen.pdf. Acesso em: 2 ago. 2020.

A atividade **1** aborda a história da radioatividade, sendo descoberta a partir da rocha de urânio.

A seguir estão apresentadas as resoluções dos itens da atividade **2**.

a) Os pontos *A*, *B* e *C* do gráfico construído no **GeoGebra** são, respectivamente, pontos em que $t = 0$, $t = 35$ e $t = 70$.



b) Observando o gráfico do item anterior, nota-se que $t = 10$ é abscissa de um ponto com ordenada entre 35 e 40. Como é solicitado um valor aproximado, a resposta depende da precisão com que se consiga fazer essa estimativa. Com o **GeoGebra** é possível construir o ponto de abscissa 10 e ordenada $M(10)$. A precisão nesse caso dependerá do arredondamento selecionado no *software*. Espera-se que os estudantes concluam que o valor desejado é próximo de 36.

c) Calculando $M(10) = 50 \cdot 10^{\left(-\frac{10}{70}\right)}$ na calculadora, tem-se $M(10) \simeq 35{,}98$.

A atividade **3** envolve a comparação entre potências de mesma base. Ao considerar $M(0) = 16$ e $M(n) = 16 \cdot 2^{\left(\frac{-n}{5}\right)}$, tem-se:

$$2^{-111} = 2^{4+\left(\frac{-n}{5}\right)} \Leftrightarrow 4 - \frac{n}{5} = -111 \Rightarrow 20 - n = -555 \Rightarrow n = 555 + 20 \Rightarrow n = 575$$

Portanto, a substância considerada terá a massa indicada daqui a 575 anos.

Na atividade **4**, propor aos estudantes que realizem uma pesquisa de alguns acidentes radioativos da história. Essa atividade deve ser realizada em grupo. Sugere-se que a apresentação da pesquisa seja feita em um material impresso com imagens e texto, como se fosse um folheto, contendo as informações obtidas de cada grupo. Para conhecer alguns dos maiores acidentes envolvendo energia nuclear, acessar o *site* <https://exame.com/tecnologia/os-maiores-acidentes-nucleares-da-historia/> (acesso em: 2 ago. 2020). Sugere-se que esse trabalho seja feito em parceria com o professor de História, da área de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, de modo que os estudantes compreendam a importância de conhecer catástrofes ocorridas no passado para evitar que elas se repitam no futuro.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para complementar a discussão desse assunto, pode-se verificar se os estudantes conhecem filmes ou séries em *streaming* que têm como tema "energia nuclear". Muitas séries de ficção utilizam conceitos matemáticos e físicos que ajudam a desenvolver um enredo fictício. É importante que os estudantes consigam discernir o que é real e o que é fictício nesse tipo de produção.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

A resolução de problemas com funções exponenciais, trabalhando a compreensão e a interpretação das grandezas envolvidas, explora a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT304**. Trabalha-se, ainda, o Tema Contemporâneo Transversal **Ciência e Tecnologia**.

Aproveite a atividade resolvida **9** para conversar com os estudantes a respeito da preservação das espécies animais. A reportagem a seguir traz informações sobre esse assunto. São 11 animais que podem sumir nos próximos anos: ararajuba, arara-azul, ariranha, baleia-franco-do-sul, cervo-do-pantanal, gato-maracajá, lobo-guará, macaco-aranha, mico-leão-dourado, onça-pintada e tamanduá-bandeira.

> [...]
>
> Segundo o Ministério do Meio Ambiente (MMA) e o Instituto Chico Mendes de Conservação da Biodiversidade (ICMBio), existem mais de mil espécies com risco de extinção no Brasil.
>
> Isso é mais triste, quando temos em mente que o Brasil é o país com a biodiversidade mais rica do mundo. Só no quesito pássaros em extinção, o Brasil lidera o *ranking* com maior número de espécies em extinção, seguido pela Indonésia.
>
> [...] Tráfico de animais, queimadas, desmatamento, construção de hidrelétricas, poluição e caça predatória são os principais motivos.
>
> [...]
>
> NASCIMENTO, T. 11 animais em extinção no Brasil que podem sumir nos próximos anos. **Segredos do Mundo**, 23 fev. 2019. Disponível em: https://segredosdomundo.r7.com/11-animais-em-extincao-no-brasil-que-podem-sumir-nos-proximos-anos/. Acesso em: 2 ago. 2020.

Aproveitar as atividades propostas para verificar as respostas apresentadas pelos estudantes, promover a reflexão e avaliar a compreensão dos conceitos estudados até o momento. Eles vão utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações que envolvem questões socioeconômicas, desenvolvendo a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, bem como utilizar diferentes registros de representação matemática na busca de solução de problemas desenvolvendo a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

Ao analisar a atividade **33**, explicar aos estudantes que a teoria de resfriamento fez parte dos estudos do físico inglês Isaac Newton. Essa teoria se refere ao tempo que um corpo leva para atingir o equilíbrio térmico quando está em contato com um reservatório térmico. Esse assunto pode ser desenvolvido em parceria com professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Ao explorar a atividade **34**, é possível realizar um trabalho integrado com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** a respeito de crescimento e decrescimento populacional.

Ao desenvolver a atividade **44**, é importante que os estudantes justifiquem o porquê de cada afirmação ser verdadeira ou falsa. Espera-se que eles apliquem os conceitos de função exponencial com base nas informações de cada item.

As atividades **45** e **55** são de elaboração de questão com base em informações do enunciado. Esse tipo de atividade leva os estudantes a refletir sobre os conceitos de função exponencial, utilizar a criatividade e propor resoluções de diferentes maneiras, desenvolvendo a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT304**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades exploram conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações que envolvem as áreas de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**, além de questões socioeconômicas, desenvolvendo a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

É interessante que os estudantes compartilhem as resoluções, após desenvolverem essas atividades, para verificar se ainda há dúvidas quanto aos conceitos de função exponencial e de equação e inequação exponenciais. Se julgar oportuno, antes de indicar as atividades, pedir aos estudantes que elaborem um esquema conceitual diferenciando função, equação e inequação exponenciais para ajudar na resolução das atividades. As atividades complementares também podem servir como parte do processo avaliativo dos estudantes, solicitando que entreguem as resoluções de algumas atividades selecionadas.

Para as atividades em que é necessário julgar afirmações como verdadeiras ou falsas, pedir aos estudantes que justifiquem por escrito a escolha que fizeram para que compreendam o que há de errado nas afirmações falsas. Uma maneira de aprofundar esse tipo de atividade é solicitar que reescrevam afirmações falsas tornando-as verdadeiras.

Como atividade extra, sugere-se a seguinte questão, aplicada no Enem 2019.

(Enem/MEC) O Índice de Desenvolvimento Humano (IDH) é uma medida usada para classificar os países pelo seu grau de desenvolvimento. Para seu cálculo, são levados em consideração a expectativa de vida ao nascer, tempo de escolaridade e renda *per capita*, entre outros. O menor valor deste índice é zero e o maior é um. Cinco países foram avaliados e obtiveram os seguintes índices de desenvolvimento humano: o primeiro país recebeu um valor X, o segundo $\sqrt{X}$, o terceiro $X^{\frac{1}{3}}$, o quarto X^2 e o último X^3. Nenhum desses países zerou ou atingiu o índice máximo.

Qual desses países obteve o maior IDH?

a) O primeiro.
b) O segundo.
c) O terceiro.
d) O quarto.
e) O quinto.

Resolução

Ao escrever o IDH de cada país em uma mesma base X que está entre zero e um, tem-se:

Primeiro país: X
Segundo país: $X^{\frac{1}{2}}$
Terceiro país: $X^{\frac{1}{3}}$
Quarto país: X^2
Quinto país: X^3

Comparando as potências de mesma base, tem-se:

$X^3 < X^2 < X < X^{\frac{1}{2}} < X^{\frac{1}{3}}$

Assim, o país que obteve o maior IDH foi o terceiro. Portanto, a resposta correta é a alternativa **c**.

PARA REFLETIR

Nesse tópico são relacionados os assuntos estudados no Capítulo, possibilitando aos estudantes realizar questionamentos que auxiliam na reflexão do próprio processo de aprendizagem. É importante que eles respondam às questões individualmente e compartilhem as respostas para verificar se surgem algumas dúvidas conceituais.

Após responderem à última questão, propor aos estudantes que se reúnam em duplas para que possam comparar os fluxogramas elaborados, verificando se esqueceram algum conceito que o colega indicou no esquema construído.

CAPÍTULO 3

Função logarítmica

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listado o Tema Contemporâneo Transversal trabalhado. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156, 157 e 158 deste livro.

- **Competências gerais:** 2, 7, 8, 9 e 10
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 1: **EM13MAT103**
  - Competência específica 3: **EM13MAT304** e **EM13MAT305**
  - Competência específica 4: **EM13MAT403**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 3
- **Tema Contemporâneo Transversal:**
  - Saúde

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

Para que os estudantes percebam a presença da Matemática no mundo, relacionando-a a diversos contextos, torna-se necessário consolidar e aprofundar os conceitos de função, em particular, a função logarítmica, que é objeto de estudo deste Capítulo. Esses conhecimentos devem levar os estudantes a formular e resolver diferentes situações-problema, tendo mais autonomia para decidir a maneira mais adequada de utilizar conceitos matemáticos.

Enfatizar que as funções logarítmicas estão presentes em diversas áreas, como Matemática Financeira e Ciências da Natureza. Um exemplo de aplicação desse tipo de função se dá ao medir a intensidade dos terremotos utilizando a escala Richter.

Recomenda-se iniciar uma conversa com os estudantes a respeito de quais relações eles fazem a partir das imagens de abertura do Capítulo. Nelas, é possível observar uma jovem com fones de ouvido e pessoas em um *show* musical. Essas imagens e o texto que as acompanham propõem uma reflexão das consequências, para a saúde, de sons muito altos em nosso cotidiano, entre eles, o uso incorreto de fones de ouvido. Destacar que a função logarítmica se faz presente nas atividades que envolvem a medição de sons. Verificar o que os estudantes conhecem a respeito do som e das unidades de medida utilizadas para expressar sua intensidade. Ao interpretar textos como o da abertura desse Capítulo, os estudantes trabalham a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT103**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

A atividade **1** trata de uma pesquisa sobre a unidade de medida de intensidade sonora decibel. Se possível, providenciar um aplicativo de decibelímetro no celular e utilizar para medir os ruídos da sala de aula, de áreas da escola ou da rua para exemplificar a aplicação. Espera-se que os estudantes compreendam que a intensidade do som, conhecida como intensidade sonora, pode ser apresentada em algumas unidades, entre elas, o bel e o decibel (que é uma décima parte do bel). O nível de pressão sonora (do inglês SPL, *Sound Pressure Level*) está relacionado à potência do som e é medido em Pa (N/m^2). Com isso, espera-se que, mesmo ainda sem compreender como operar com logaritmos, os estudantes percebam que o cálculo da intensidade sonora, na unidade decibel, é uma relação logarítmica. Para saber mais informações a respeito do som e do decibelímetro, acessar <http://www.uel.br/pessoal/renatoikeoka/pages/arquivos/Fisica%20Aplicada%20a%20Engenharia%20II/OSC4_som_Intensidade_uso_do%20_decibelimetro.pdf> (acesso em: 3 ago. 2020).

A atividade **2** propõe uma pesquisa a respeito do Selo Ruído, que foi criado pelo Instituto Nacional de Metrologia, Qualidade e Tecnologia (Inmetro) e pelo Instituto Brasileiro do Meio Ambiente e dos Recursos Naturais Renováveis (Ibama). Esse selo é uma etiqueta que informa os consumidores sobre o nível de ruído produzido por eletrodomésticos. Alguns aparelhos, como aspirador de pó, secadores de cabelo, liquidificadores e ventiladores devem receber o Selo Ruído.

Discutir com os estudantes a importância de os consumidores escolherem eletrodomésticos mais silenciosos para estimular a produção de produtos com ruídos cada vez menores. O texto a seguir traz informações sobre o Selo Ruído.

Selo Ruído

Você não percebe mas vários ruídos existem no seu dia a dia, como buzinas, obras, música alta, eletrodomésticos, aeroportos e trânsito. Mas você sabe o que esse excesso de ruídos pode causar ao seu organismo? Esses ruídos, chamados de poluição sonora, podem causar distúrbios no sono, surdez, estresse, ansiedade, falta de concentração, dores de cabeça, distúrbios digestivos e, até, aumento da agressividade.

E foi pensando nisso, que o Inmetro e o Ibama criaram o Selo Ruído, parte do Programa Silêncio, que tem como objetivo combater a poluição sonora do país, orientar o consumidor na hora de escolher eletrodomésticos mais silenciosos, estimular os fabricantes a produzirem produtos com níveis de ruídos cada vez menores e melhorar a saúde do cidadão.

O Selo Ruído deve estar visível ao consumidor em eletrodomésticos que produzem ruído, nacionais ou importados. Atualmente, o Selo deve ser encontrado em aspiradores de pó, secadores de cabelo e liquidificadores. Deve estar colado no produto ou em sua embalagem, para que na hora da compra, você possa escolher aquele que tenha o menor nível de potência sonora. Assim, fica fácil comparar os modelos e escolher qual o melhor para você.

[...]

INMETRO. **Selo Ruído**. Rio de Janeiro, c1993-2012. Disponível em: http://www.inmetro.gov.br/imprensa/releases/seloRuido.asp. Acesso em: 3 ago. 2020.

A atividade **3** traz uma reflexão sobre o uso de fones do ouvido pelos estudantes e propõe uma pesquisa a respeito da Perda Auditiva Induzida por Ruídos (PAIR). A seguir, são apresentadas algumas informações da PAIR.

[...]

Algumas categorias profissionais apresentam dados epidemiológicos de prevalências elevadas de Pair. São categorias de grande relevância epidemiológica tais como metalúrgicos, beneficiamento de pedras e madeira, mármore e granito, construção civil, mineradores, gráficos, vidreiros, químicos, fiação e tecelagem, dentre outras.

Os sinais e sintomas característicos da Pair:

— Sensação de diminuição da audição

— Presença de zumbido

— Tontura

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

— Dificuldade do entendimento da fala
— Grande incômodo na presença de sons mais elevados
— Dificuldades na localização sonora
— Alterações do sono
— Ansiedade e stress
[...]

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Saúde. **Orientações técnicas para a notificação no Sinan da Perda Auditiva Induzida por Ruído (Pair)**. São Paulo, 2017. Disponível em: http://www.cvs.saude.sp.gov.br/zip/PAIR.pdf. Acesso em: 3 ago. 2020.

O som está relacionado à variação de pressão exercida no ar que chega a nossa orelha, o qual passa a vibrar, propagando pelo canal auditivo a onda sonora. Como os fones ficam muito próximos à orelha, quando emitem sons de alta intensidade, por certo tempo, podem danificar o canal auditivo mais rapidamente. A PAIR é uma lesão causada à orelha ou ao sistema auditivo em longo prazo. As principais causas estão associadas a sons altos ouvidos por muito tempo ou instantâneos (explosões e impactos sonoros). Atualmente, o grupo de maior risco para PAIR é o de jovens e adultos. Para saber mais informações, consulte a notícia "Seconci-SP alerta para risco de Perda Auditiva Induzida por Ruído (PAIR)", publicada na revista eletrônica **Cipa&Incêndio**, em 2017, disponível em <https://revistacipa.com.br/seconci-sp-alerta-para-risco-de-perda-auditiva-induzida-por-ruido-pair/> (acesso em: 3 ago. 2020).

Sugere-se desenvolver um trabalho em parceria com o professor do componente curricular de Física da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** a respeito da intensidade sonora e dos hábitos auditivos para que os estudantes promovam uma campanha de conscientização na comunidade escolar e aos familiares, relatando problemas que podem ser causados pela exposição prolongada ao som alto. A fim de coletar dados estatísticos da localidade, os estudantes podem elaborar um questionário e entrevistar as pessoas verificando como costumam utilizar os fones de ouvido, a frequência de utilização e o volume do aparelho de reprodução do som. Os dados da pesquisa precisam ser compilados e podem ser compartilhados com a comunidade por meio de infográficos.

Com essas atividades, os estudantes têm a oportunidade de investigar, refletir e analisar criticamente as causas de certo acontecimento, desenvolvendo a competência geral **2**.

O tema de abertura do Capítulo, assim como as atividades, leva os estudantes a refletir a respeito de seus hábitos e como eles podem influenciar sua saúde, estimulando o autocuidado e contribuindo para o desenvolvimento da competência geral **8**.

Introdução

Esse tópico apresenta aos estudantes situações que estimulam o estudo dos logaritmos e da função logarítmica. Verificar se os estudantes compreendem que, em uma equação exponencial, caso os membros da igualdade não possam ser representados como potências de mesma base, não é possível resolver utilizando as técnicas vistas no Capítulo anterior. Comentar com os estudantes os fenômenos citados que fazem uso dos logaritmos e verificar quais deles já conhecem ou já ouviram falar.

No tópico **Logaritmo**, comentar que algumas traduções trazem a definição de logaritmo como a composição das palavras gregas *logos*, significando razão, e *arithmos*, significando número, como consta no boxe **Saiba que...** desse tópico. Os logaritmos surgiram na tentativa de simplificar os cálculos matemáticos que eram muito extensos em áreas como Astronomia, Economia e Engenharia, e os primeiros estudos a esse respeito são atribuídos a John Napier (1550-1617), no final do século XVI, que será comentado com mais detalhes na seção **História da Matemática**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

No tópico **Condições de existência do logaritmo**, enfatizar que o logaritmando só pode ser positivo e a base do logaritmo deve ser positiva e diferente de 1. Comentar que a maioria dos logaritmos é um número irracional e, portanto, ao realizar cálculos com os logaritmos, em geral, usamos aproximações dos valores.

FÓRUM

Verificar o que os estudantes conhecem a respeito do tema proposto, poluição sonora, e pedir a eles que deem exemplos de situações vivenciadas com esse tipo de poluição. Ao realizar a pesquisa proposta, os estudantes têm oportunidade de exercitar elementos da investigação científica e da análise crítica, como prevê a competência geral **2**. Essa atividade pode, ainda, ampliar a capacidade de argumentação e defesa de ideias sobre a consciência socioambiental, desenvolvendo a competência geral **7**.

Sugere-se apresentar o vídeo **Poluição sonora**: os perigos para a saúde e como o Brasil planeja controlar ruídos, disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=C1nP9eYkb_U> (acesso em: 3 ago. 2020). Esse vídeo comenta os riscos de se desenvolver uma doença do coração por causa da exposição a ruídos e mostra como o Brasil pretende impor limites para garantir condições de audição saudáveis. No vídeo é citado um mapa acústico como ferramenta de avaliação de tráfego veicular, implementado em alguns locais do Brasil.

O *site* do INAD (Dia Internacional da Conscientização Sobre o Ruído), disponível em <http://inadbrasil.com/> (acesso em: 3 ago. 2020), apresenta ações com o objetivo de conscientizar a população a respeito da poluição sonora.

> O Dia Internacional de Conscientização sobre o Ruído é uma campanha internacional, conhecida também pelo nome em inglês International Noise Awareness Day.
>
> Nas Américas o Dia Internacional de Conscientização sobre o Ruído é celebrado no Brasil, no Canadá, no Chile e nos Estados Unidos.
>
> Na Europa a campanha está sendo promovida por exemplo na Alemanha, na Áustria, na Espanha e na Suíça.
>
> INAD no mundo. **INAD Brasil**, c2020. Disponível em: http://inadbrasil.com/inad-no-mundo/. Acesso em: 3 ago. 2020.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas contemplam os conceitos de logaritmo. Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas.

Por meio dessas atividades, os estudantes conseguem retomar o que foi estudado até o momento: a definição, as propriedades e a condição de existência do logaritmo. Se necessário, na atividade resolvida **6**, relembrar como fazer o estudo do sinal de uma função.

As atividades propostas auxiliam os estudantes na compreensão dos conceitos de logaritmos. Se julgar adequado, propor que as atividades sejam resolvidas em dupla para que os estudantes possam compartilhar informações e estratégias de resolução. Uma sugestão é pedir que eles elaborem um esquema contendo a definição, as propriedades e a condição de existência de logaritmos antes de iniciar a resolução das atividades.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

O texto a seguir é uma reflexão a respeito do tópico **Propriedades operatórias dos logaritmos**.

> [...]
>
> O estudante atual deve considerar sem preconceitos logaritmos em qualquer base, tendo em conta porém o grande destaque dos logaritmos *naturais*, aqueles que têm por base o número *e*. Esse número, cuja importância fundamental decorre da sua ubiquidade, isto é, da peculiaridade de aparecer em vários lugares ao mesmo tempo, deve ser apresentado ao estudante de Matemática ainda cedo, assim que começar a estudar logaritmos, a fim de que possa ser utilizado sem estranheza e sem maiores dificuldades.
>
> Exemplos de problemas, de origem variada, onde surgem logaritmos e exponenciais de forma espontânea, devem ser apresentados aos estudantes, a fim de habituá-los com o manuseio de questões relativas ao crescimento exponencial e logarítmico. E, finalmente, a própria conceituação de logaritmo deve ser introduzida de forma honesta, sem escamotear as dificuldades.
>
> A definição tradicional diz que o logaritmo de um número positivo x num sistema de base $a > 0$ é o expoente y ao qual se deve elevar a base a de modo que se tenha $a^y = x$. Esta definição permite obter rapidamente as propriedades fundamentais dos logaritmos, a mais importante das quais é a regra
>
> $$\log (x \cdot x') = \log x + \log x'.$$
>
> [...]
>
> LIMA, E. L. Sistemas de logaritmos. **RPM**, Rio de Janeiro, n. 18. Disponível em: http://rpm.org.br/cdrpm/18/6.htm. Acesso em: 4 ago. 2020.

A generalização das propriedades auxilia a compreensão da sua aplicação. Após apresentar as propriedades operatórias dos logaritmos aos estudantes, propor a eles que elaborem um exemplo de expressão que pode ser resolvida utilizando cada uma dessas propriedades. Depois, que eles troquem os exemplos com os colegas para que um resolva os do outro. Por fim, que confiram juntos as resoluções.

Ao desenvolver o tópico **Calculadora e logaritmos**, se possível, solicitar aos estudantes que tragam uma calculadora científica para a aula ou então usem as disponíveis nos *smartphones*. Em seguida, questionar se sabem operar as calculadoras que têm em mãos. Caso alguém tenha dificuldade, é importante realizar um trabalho de manuseio dessas calculadoras. Uma alternativa é reunir os estudantes em grupos para que eles se ajudem nesse manuseio, verificando o modelo de calculadora que está sendo utilizado. Eles devem considerar a informação apresentada no boxe **Saiba que...**, em que, ao realizar algum cálculo com logaritmos, a mudança de base é necessária.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas contemplam as propriedades operatórias de logaritmo. Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas. Caso algum estudante perceba outra maneira de resolver alguma dessas atividades, é importante que ele compartilhe o raciocínio utilizado. Encontrar diferentes maneiras de resolver um mesmo problema é uma habilidade que precisa ser desenvolvida nos estudantes.

Durante o desenvolvimento da atividade resolvida **10**, comentar com os estudantes a respeito de arredondamentos, já que essa atividade pede para considerar 5 casas decimais. É importante que eles se atentem aos seguintes itens:

- Observar o algarismo que aparece logo em seguida à casa em que será feito o arredondamento. Se ele for maior do que ou igual a 5, então adiciona-se uma unidade ao algarismo anterior (da última casa considerada); se for menor do que 5, considera-se o algarismo da última casa. Por exemplo, o número 23,4534725 ao ser arredondado na quinta casa decimal fica 23,45347, pois na sexta casa há o algarismo 2, que é menor do que 5. Caso fôssemos arrendondar esse número na sexta casa decimal, então ele ficaria 23,453473, pois a sétima casa tem o algarismo 5.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

- Considerar o número de casas decimais com base no contexto apresentado. Em geral, em relatórios feitos para a área de Engenharia ou de Física, todos os números devem aparecer com o mesmo número de casas decimais.
- Ao utilizar a calculadora, nem sempre o arredondamento é realizado conforme o primeiro item. Pode ocorrer de a tela da calculadora simplesmente exibir até determinada quantidade de algarismos, não realizando o arredondamento adequado.

As atividades propostas auxiliam os estudantes na compreensão dos conceitos de logaritmo e suas propriedades operatórias. Sugere-se aos estudantes que tentem resolvê-las de diferentes maneiras, utilizando os conceitos que foram estudados. Ao corrigi-las, é importante que as resoluções sejam compartilhadas.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Essa seção apresenta um pouco da história do surgimento dos logaritmos, possibilitando o reconhecimento da Matemática como uma ciência construída pelo ser humano e influenciada por questões da sociedade. Sugere-se complementar a seção citando Briggs, que deu continuidade aos estudos de Napier.

O matemático inglês Henry Briggs (1561-1631) foi o primeiro a reconhecer a importância dos logaritmos de Napier. Briggs visitou Napier em 1615 na Escócia e discutiram algumas alterações no método dos logaritmos. O texto a seguir traz algumas informações sobre esses estudos.

> [...]
>
> Levando em conta a iniciativa das ideias e das descobertas de Neper e Briggs, podemos afirmar que os logaritmos tiveram pouco sucesso, mas em meio a condições da época efetuou-se de maneira rápida e extensa, no entanto, não foi tão adquirido pelas circunstâncias; os meios de comunicação eram muito lentos, pouco numerosos e não eram certos. Os livros viajavam apenas com as mercadorias transportadas para o meio de grandes feiras, numa data marcada, e em lugares bem determinados, que limitavam as possibilidades de indicá-los. Apesar das dificuldades enfrentadas, esses trabalhos foram alvo de pesquisas para a ampliação de avanços tecnológicos, no qual levaram cientistas, professores e analistas a estudar esse instrumento de muita significância para o progresso científico. (NAUX, Tome II, 1971, p. 1) (Tradução Nossa)
>
> [...]
>
> SOARES, E. C. **Uma investigação histórica sobre os logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2011. Disponível em: https://repositorio.ufrn.br/jspui/bitstream/123456789/16070/1/EvanildoCS_DISSERT.pdf. Acesso em: 4 ago. 2020.

É oportuno pedir aos estudantes que aprofundem o estudo da história dos logaritmos realizando uma pesquisa de como os conceitos de logaritmo contribuíram para a Astronomia. Esse trabalho pode ser realizado em parceria com o professor do componente curricular de Física da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Essa seção trabalha estratégias e conceitos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, como descreve a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Função logarítmica

Comentar com os estudantes que as funções logarítmicas estão relacionadas a muitos fenômenos e situações naturais e podem ser definidas como a função *f*, de domínio $\mathbb{R}_+^*$ e contradomínio $\mathbb{R}$, que associa cada número real e positivo *x* ao logaritmo de *x* na base *a*, em que *a* é um número real, positivo e diferente de 1.

Ao explorar o exemplo envolvendo o potencial hidrogeniônico (pH), é importante dizer que o termo de comparação é a água pura, cujo pH é 7 a 25 °C. O pH é medido em escala logarítmica de base 10, o que significa que, com a diminuição de um ponto na escala de pH, a solução torna-se 10 vezes mais ácida. Esse assunto pode ser desenvolvido em parceria com o professor do componente curricular de Química da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

O tópico **Gráfico da função logarítmica** inicia com um boxe **Pense e responda** que visa estimular os estudantes a investigarem algumas características do gráfico da função logarítmica. Dessa forma, propicia-se que eles sejam parte da construção do conhecimento, promovendo a autonomia e o protagonismo dos estudantes. Para essa atividade, se possível, levá-los ao laboratório de informática para que, em duplas, possam desenvolver a atividade usando algum *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**.

No primeiro item, espera-se que os estudantes concluam que, à medida que o valor de *x* aumenta, o valor de $f(x)$ também aumenta e que, à medida que o valor de *x* aumenta, o valor de $g(x)$ diminui. No segundo item, espera-se que os estudantes percebam que a função *f* parece ser uma função crescente e que a função *g* parece ser uma função decrescente. No terceiro item, espera-se que os estudantes percebam que, quando $a > 1$, a função parece ser crescente e, quando $0 < a < 1$, a função parece ser decrescente.

Após realizar as atividades do boxe, apresentar aos estudantes as informações relativas ao gráfico da função logarítmica e solicitar que comparem com as respostas obtidas anteriormente. Desse modo, eles são estimulados a verificar as hipóteses levantadas.

No tópico **Relação entre função exponencial e função logarítmica**, ressaltar que tanto a função exponencial como a função logarítmica são bijetoras. Se necessário, retomar esse conceito. É importante que os estudantes compreendam que a função logarítmica e a função exponencial são inversas uma da outra e, além disso, que seus gráficos são simétricos em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares. Esse tema favorece o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidades **EM13MAT304** e **EM13MAT305** e da competência específica **4**, habilidade **EM13MAT403**.

Equações logarítmicas

Esse tópico aborda os conceitos de equações logarítmicas. É importante lembrar a condição de existência do logaritmo. Sempre que houver incógnitas no logaritmando ou na base, é preciso garantir a existência do logaritmo. Apresentar exemplos com valores numéricos para que os estudantes possam visualizar melhor essa propriedade na prática.

Inequações logarítmicas

Esse tópico aborda os conceitos de inequações logarítmicas. Enfatizar aos estudantes que uma inequação logarítmica apresenta algum dos sinais de desigualdade: $<$, $\leqslant$, $>$ ou $\geqslant$. Novamente, deve-se garantir a existência do logaritmo lembrando-se das condições: o logaritmando e a base devem ser positivos e a base deve ser diferente de 1.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas contemplam os conceitos de função logarítmica, equação e inequação logarítmicas. Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas.

É importante que os estudantes compreendam que, para resolver as inequações logarítmicas, obtêm-se logaritmos de bases iguais nos dois membros da inequação para comparar os logaritmandos e é necessário verificar se as funções envolvidas são crescentes ou decrescentes. Para isso, são utilizadas as propriedades dessas funções e considera-se a função $f(x) = \log_a x$ crescente quando a base $a > 1$ e decrescente quando $0 < a < 1$.

Ao desenvolver a atividade resolvida **17**, comentar com os estudantes que nem sempre a resposta obtida em situações-problema envolvendo cálculos com logaritmos é um número inteiro; muitas vezes, é necessário realizar aproximações e refletir como essas aproximações influenciam na resposta. Se o valor aproximado obtido nessa atividade fosse menor do que 23 e maior do que 22, então, pelo contexto, seriam considerados 23 anos; se o valor aproximado obtido fosse maior do que 23 e menor do que 24, então seria necessário considerar 24 anos. Uma opção para esses casos é apresentar a resposta em anos e meses, caso o contexto permita.

As atividades propostas exploram a resolução e a elaboração de problemas com funções logarítmicas, desenvolvendo a compreensão e a interpretação das variáveis envolvidas, contribuindo com a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT305**. Também são realizadas a análise e as representações de funções logarítmicas, desenvolvendo a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT403**.

Algumas atividades apresentam situações-problema que devem ser investigadas por meio de procedimentos e linguagens próprios das Ciências da Natureza aplicados na resolução, como descreve a competência específica **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Para complementar a atividade **26**, pode-se apresentar as seguintes questões: "O gráfico da função dada por $y = \log |x|$ tem alguma simetria?"; "Como se comportam os valores negativos dessa função?". Espera-se que os estudantes percebam a simetria desse gráfico em relação ao eixo y por causa da presença do módulo e notem que os valores da função são negativos quando $-1 < x < 1$, lembrando que $x \neq 0$. Se possível, essa é uma boa oportunidade para mostrar o comportamento da função em um *software* de geometria dinâmica, como o **GeoGebra**.

Ao discutir a resolução das atividades **37** e **38**, é interessante que as situações-problema elaboradas sejam compartilhadas por diferentes duplas para que os estudantes possam observar os conceitos matemáticos inseridos na criação de cada colega.

Ao longo de toda a seção **Atividades**, principalmente nas atividades de elaboração, os estudantes são estimulados a investigar, refletir, elaborar e testar hipóteses com base nos conhecimentos de diferentes áreas, desenvolvendo a competência geral **2**. Além disso, ao verificar as resoluções e estratégias das questões elaboradas pelos colegas, trabalha-se a argumentação com base em fatos e dados, desenvolvendo a competência geral **7**.

Para complementar a atividade **39** dessa seção, sugere-se pedir aos estudantes que pesquisem a respeito do pH da pele. Atualmente, as pessoas fazem uso de muitos produtos para a pele, como maquiagens e hidratantes, e esses produtos devem ser escolhidos considerando o pH da pele. O texto a seguir trata desse assunto.

[...]

O pH varia numa faixa até 14. Quanto mais próximo do 0, mais ácido. Se o valor está mais para 14, é alcalino. O pH da pele é 5,5, explica Sônia Corazza. Se é sensível ou ressecada, o ideal é usar um sabonete com pH mais próximo da pele. Nestes casos, deve-se optar pelos produtos líquidos e cremosos (o pH vai de 5,5 a 7). O sabão em barra, de forma geral, tem pH mais alcalino, de 8 a 9. Por isso, são bons para a higiene do corpo.

[...]

MACHADO, A. Saiba como escolher o sabonete certo de acordo com o tipo de pele. **Extra**, 14 jun. 2014. Disponível em: https://extra.globo.com/noticias/economia/saiba-como-escolher-sabonete-certo-de-acordo-com-tipo-de-pele-12855123.html. Acesso em: 5 ago. 2020.

Após a pesquisa, propor a seguinte questão.

Considerando o pH da pele humana levemente ácido no intervalo de 5,5 a 5,8, se uma pessoa utilizar um produto cuja concentração molar hidrogeniônica é $1{,}48 \cdot 10^{-5}$, ela estará usando um produto básico ou ácido? Esse produto pode fazer mal à pele?

Resolução:

$pH = -\log [H^+]$

$pH = -\log [1{,}48 \cdot 10^{-5}]$

$pH = -[\log 1{,}48 + \log 10^{-5}]$

$pH = -[\log 1{,}48 - 5 \cdot \log 10]$

$pH = -[0{,}17 - 5]$

$pH = -[-4{,}83]$

$pH = 4{,}83$

Portanto, esse produto pode fazer mal à pele dessa pessoa, pois ele é muito ácido.

> EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Essa seção contribui para o desenvolvimento da reflexão e análise crítica dos estudantes, possibilitando que eles elaborem e testem hipóteses, desenvolvendo a competência geral **2**.

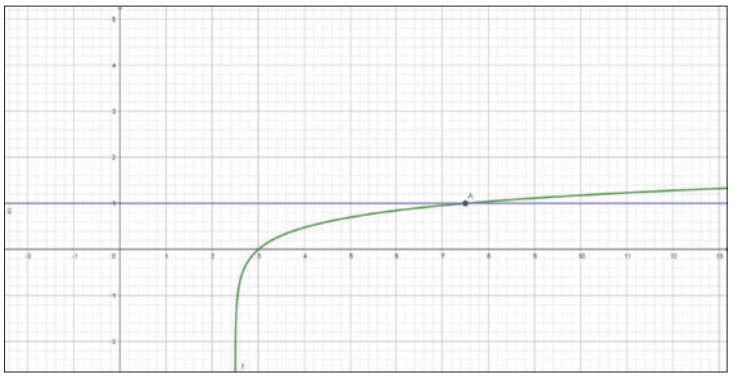
Também é explorada a resolução de problemas que envolvem a compreensão e a interpretação da variação de grandezas de função logarítmica em diversos contextos, desenvolvendo a competência específica **3** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT305**.

O **GeoGebra** é utilizado nessa seção como ferramenta de resolução de inequações logarítmicas a partir da análise gráfica. É importante discutir com os estudantes as aproximações feitas pelo *software* ao apresentar alguns valores. Assim, são mostradas aproximações racionais para valores irracionais.

Verificar se os estudantes conseguem justificar a afirmação feita no boxe **Saiba que...** por meio da análise do gráfico das funções f e g.

Para resolver a atividade **1**, os estudantes podem considerar as funções f e g, dadas respectivamente por $f(x) = \log (2x - 5)$ e $g(x) = 1$. Ao construir os gráficos dessas funções no **GeoGebra**, obtém-se a imagem ao lado.

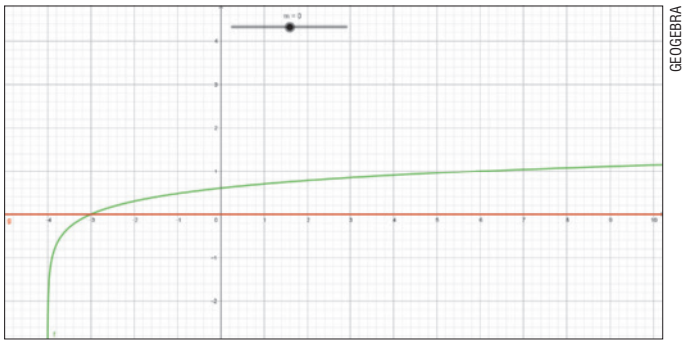
GEOGEBRA



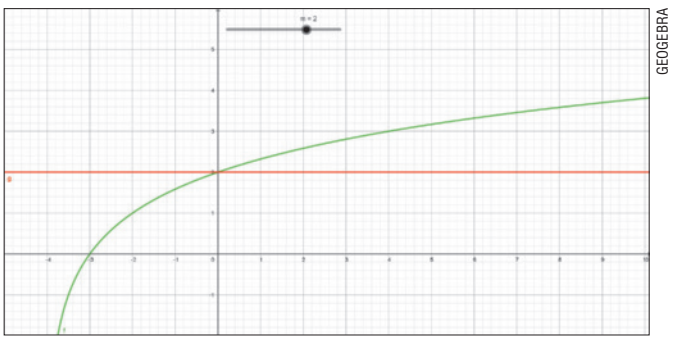
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Observando o gráfico, nota-se que $f(x) \leq g(x)$ para $x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 < x \leq 7{,}5$.

Para resolver a atividade **2**, os estudantes podem considerar as funções f e g, dadas respectivamente por $f(x) = \log(x + 4)$ e $g(x) = m$ e criar um **Controle deslizante** no **GeoGebra**. Pela condição de existência, tem-se $x > -4$. Assim, para obter $f(x) < g(x)$, com $x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < -3$, m deve ser 0, conforme a representação a seguir.



A atividade **3** é resolvida de maneira semelhante à anterior, considerando as funções f e g, dadas respectivamente por $f(x) = \log_2(x + 4)$ e $g(x) = m$. Assim, $f(x) > g(x)$ terá apenas valores positivos para $m = 2$, conforme a imagem a seguir.



CONEXÕES

Essa seção trabalha "a investigação, a reflexão, a análise crítica [...] para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas" (BRASIL, 2018, p. 9), como descreve a competência geral **2**. Também realiza um trabalho a respeito da saúde física e emocional, levando os estudantes a compreenderem-se na diversidade humana, "reconhecendo suas emoções e as dos outros, com autocrítica e capacidade para lidar com elas" (BRASIL, 2018, p. 10), como diz a competência geral **8**, para "exercitar a empatia, o diálogo, a resolução de conflitos e a cooperação, fazendo-se respeitar e promovendo o respeito ao outro e aos direitos humanos" (BRASIL, 2018, p. 10), desenvolvendo a competência geral **9**, e para agir com autonomia, responsabilidade e flexibilidade, tomando decisões baseadas em princípios éticos, como descreve a competência geral **10**.

O texto dessa seção traz informações que envolvem o uso de medicamentos desnecessários e de modo irregular e sua relação com a saúde dos jovens. As questões propostas têm objetivo de desenvolver esse assunto e levar os estudantes a uma reflexão. Ao interpretar textos como o dessa seção, os estudantes têm contato com a competência específica **1** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT103**, e com o Tema Contemporâneo Transversal **Saúde**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes percebam que o problema do uso de medicamentos pelos jovens está na automedicação (uso de medicamentos sem acompanhamento médico), a fim de resolver um problema de saúde de maneira rápida ou interferir na estética do corpo. Aproveitar essa questão para discutir com os estudantes os perigos da automedicação. Como sugestão, consultar a cartilha disponível em <https://portal.fiocruz.br/sites/portal.fiocruz.br/files/documentos/USO%20CORRETOcartilha_final.pdf> (acesso em: 5 ago. 2020) que traz informações sobre o uso correto de medicamentos.

A atividade **2** propõe uma pesquisa de alguns transtornos alimentares: anorexia e bulimia. Essa pesquisa pode ser realizada em parceria com o professor do componente curricular de Biologia da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. Sugere-se que os estudantes, divididos em grupos, preparem um material impresso com as informações obtidas para divulgar aos colegas da escola. Esse material pode conter gráficos, dados estatísticos, definições relacionadas a termos da saúde etc.

A anorexia ou anorexia nervosa está associada diretamente à perda de massa, pois a pessoa passa a ingerir pouco ou quase nenhum alimento, chegando à desnutrição. Já a bulimia não está necessariamente associada à perda de massa, mas corresponde a uma compulsão alimentar, sucedida de culpa, em que a pessoa elimina, via oral, o alimento ingerido. Esses transtornos alimentares precisam ser tratados com acompanhamento médico, nutricional e psicológico.

O texto a seguir apresenta informações a respeito da anorexia e da bulimia. Para obter mais materiais a respeito de transtornos alimentares, pode-se consultar o *site* <https://astralbr.org/> (acesso em: 4 ago. 2020) da Associação Brasileira de Transtornos Alimentares.

> **Anorexia Nervosa:**
> — Apresenta uma grande perda de peso;
> — Esconde a perda de peso com roupas largas ou em camadas;
> — Preocupa-se muito com o peso, com o que come, sabe todas as calorias dos alimentos;
> — Faz comentários frequentes sobre como sente-se "gorda (o)";
> — Resiste em manter um peso corporal adequado à sua idade, altura e estrutura;
> — Cumpre uma rotina de exercícios excessivo e rígido que independe do clima, fadiga, doença ou lesão.
> [...]
>
> **Bulimia Nervosa:**
> — Observa-se o desaparecimento de grandes quantidades de alimentos ou muitas embalagens e recipientes vazios, o que pode evidenciar a compulsão alimentar;
> — Faz visitas frequentes ao banheiro após as refeições, apresenta sinais e/ou cheiro de vômito;
> — Bebe quantidades excessivas de água ou bebidas não calóricas e/ou usa quantidades excessivas de enxaguante bucal, consome muitas balas e chicletes.
>
> ASTRAL. **Sinais e sintomas de alerta**. Disponível em: https://astralbr.org/wp-content/uploads/2020/05/sinaisesintomasastrall.pdf. Acesso em: 5 ago. 2020.

A atividade **3** apresenta uma função exponencial que pode ser resolvida utilizando conceitos de logaritmos estudados no Capítulo. De acordo com o enunciado, para que a quantidade de um medicamento, que inicialmente era de 500 mg, seja 90 mg, deve-se considerar que $M_0 = 500$ e $M(t) = 90$. Logo:

$$M(t) = M_0 \cdot (0{,}5)^t \Rightarrow 90 = 500 \cdot (0{,}5)^t \Rightarrow (0{,}5)^t = \frac{90}{500} \Rightarrow (0{,}5)^t = 0{,}18 \Rightarrow \log_{0{,}5} 0{,}18 = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\log 0{,}18}{\log 0{,}5} = \frac{\log 0{,}18}{\log 2^{-1}} = \frac{\log 0{,}18}{-1 \cdot \log 2} \simeq \frac{-0{,}74}{-1 \cdot 0{,}3} \simeq 2{,}47$$

Portanto, a quantidade da droga será igual a 90 mg após 2,47 horas, ou seja, aproximadamente 2 horas e 28 minutos da ingestão de 500 mg do medicamento.

Se considerar pertinente, pedir aos estudantes que esbocem o gráfico da função $M(t) = 500 \cdot (0{,}5)^t$ no **GeoGebra** e verifiquem graficamente a resposta obtida nessa atividade.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Essas atividades possibilitam o aprofundamento dos conceitos estudados neste Capítulo, portanto, é importante que os estudantes apresentem as dificuldades que venham a ter ao resolvê-las. Pode-se aplicá-las aos estudantes durante as aulas, como tarefa de casa ou como um meio de avaliação da aprendizagem após cada tópico estudado.

Propor aos estudantes que escrevam a justificativa da alternativa correta em cada uma das atividades. Esse tipo de exercício ajuda a expressar o conhecimento matemático na língua materna. Muitas vezes, os estudantes compreendem o conceito, mas têm dificuldade em explicá-lo utilizando texto escrito. Por isso, é interessante incentivá-los a escrever essas justificativas.

Nas atividades complementares **17** e **18**, relembrar os estudantes da discussão de arredondamento dos números ao utilizar logaritmos e pedir que fiquem atentos ao contexto apresentado em cada situação.

Na atividade **17**, ao calcular o período n, os estudantes vão encontrar aproximadamente 21,96. Como o contexto exige um número natural, considera-se $n = 22$. Assim, ao adicionar 30, conclui-se que a outra parcela a ser antecipada com a 30ª é a 52ª.

Na atividade **18**, n representa o número de prestações, logo, deve ser um número natural. Ao realizar os cálculos com as aproximações dos valores dados no enunciado, chega-se a um valor de n maior do que 15 e menor do que 16. Como passou de 15, o próximo número natural a considerar como resposta é o 16.

PARA REFLETIR

Nesse tópico, são relacionados os assuntos abordados no Capítulo, possibilitando aos estudantes realizar questionamentos que auxiliam na reflexão da aprendizagem deles. Sugerir que leiam individualmente o texto e façam uma autoavaliação da participação deles nas aulas e no estudo dos conceitos apresentados.

A primeira questão é pessoal e tem o objetivo de fazer os estudantes lembrarem quais conceitos estudados neste Capítulo eles já conheciam.

A segunda questão faz os estudantes recordarem que uma função logarítmica é crescente quando o valor da base a é maior do que 1, e é decrescente quando $0 < a < 1$.

A terceira questão propõe uma pesquisa de aplicação de logaritmo que não tenha sido apresentada neste Capítulo. Como exemplo, pode-se mencionar a utilização de logaritmos no cálculo do tempo da desintegração de uma substância radioativa. Esse assunto pode lembrar os estudantes do conceito de meia-vida, que foi apresentado no Capítulo anterior.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

CAPÍTULO 4

Progressões

A BNCC neste Capítulo

Este Capítulo proporciona oportunidades de desenvolver competências gerais da BNCC, bem como competências específicas e habilidades.

A seguir, estão apontados os códigos das competências gerais, competências específicas e habilidades, e listados os Temas Contemporâneos Transversais trabalhados. O texto completo referente a cada um dos códigos da BNCC está apresentado nas páginas 156, 157 e 158 deste livro.

- **Competências gerais:** 3, 5, 7 e 10
- **Competências específicas e habilidades:**
  Área de Matemática e suas Tecnologias
  - Competência específica 3: **EM13MAT315**
  - Competência específica 4: **EM13MAT405**
  - Competência específica 5: **EM13MAT507** e **EM13MAT508**

  Área de Ciências da Natureza e suas Tecnologias
  - Competência específica 2
  - Competência específica 3
- **Temas Contemporâneos Transversais:**
  - Educação Ambiental
  - Diversidade Cultural

Orientações didáticas

Abertura de Capítulo

O texto de abertura apresenta os *sona*, desenhos feitos na areia pela tribo africana Tchokwe e que podem ser relacionados a conceitos matemáticos. Neste Capítulo, os *sona* são utilizados para contextualizar o conceito de sequência e progressão e apresentar aos estudantes um elemento da cultura de determinado povo africano. Trabalham-se, assim, a competência geral **3** e o Tema Contemporâneo Transversal **Diversidade Cultural**.

Pedir aos estudantes que observem as imagens de abertura e digam se já tinham ouvido falar a respeito dos *sona* e qual relação eles imaginam que há entre essas figuras e o tema do Capítulo. Nesse momento, é importante que os estudantes assistam ao vídeo indicado no boxe **Para assistir** para que possam aprofundar a discussão inicial. É oportuno conversar com eles a respeito da matemática presente em diferentes povos e se os estudantes têm essa percepção de que um mesmo conceito pode ser desenvolvido de diferentes maneiras. O texto a seguir trata desse assunto.

> É amplamente aceita a percepção de que a matemática está presente em diferentes contextos culturais. Fala-se na "matemática do pedreiro", na "matemática do marceneiro", na "matemática dos camponeses", e assim por diante. Decorre, portanto, que há saberes e fazeres matemáticos (sim, no plural!) para além daqueles que circulam na academia e na escola.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Este entendimento levou pesquisadores em Educação Matemática a constituírem um programa de pesquisa, iniciado em meados dos anos 70 e 80, chamado de Etnomatemática, do qual o brasileiro Ubiratan D'Ambrósio foi um dos mais destacados pioneiros. Para ele, o Programa Etnomatemática é um conceito amplo que busca entender como a espécie humana desenvolveu seus meios de sobrevivência e transcendência, não restringindo-se, portanto, às ideias, práticas e técnicas matemáticas (D'AMBRÓSIO, 2018)

Por vezes, a pesquisa etnomatemática focaliza a compreensão de saberes e fazeres (classificar, quantificar, medir, etc) que reconhecemos como matemáticos. Digo "que reconhecemos", pois somos nós, com a perspectiva da academia ou da escola, que os vemos dessa forma. Nas diferentes culturas, o mais provável é que os saberes e fazeres estão tão entrelaçados, que não faz sentido falar deles como separados de suas respectivas culturas (KNIJNIK; WANDERER; GIONGO; DUARTE, 2012).

[...]

Um possível exemplo é discutir com os estudantes como um marceneiro realiza a cubagem da madeira. Biembengut e Hein (2000) contam que marceneiros no sul do país usam o seguinte procedimento: passam uma linha de cordel contornando o tronco na metade da altura estimada; dobram a linha em quatro partes iguais, elevando ao quadrado a medida do ¼ da linha do contorno; e finalmente, multiplicam pela medida da altura do tronco.

[...]

BARBOSA, J. C. Existem outras matemáticas? **Nova escola**, 3 maio 2019. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/17149/etnomatematica-existem-outras-matematicas. Acesso em: 6 ago. 2020

Depois de analisar as imagens e o texto com os estudantes, propor a eles que respondam às questões da abertura do Capítulo.

A atividade **1** propõe uma pesquisa para que os estudantes busquem mais informações dos *sona*. Os *sona* (plural de *lusona*) são utilizados pela tribo Tchokwe para auxiliar a memória na contação de histórias. Os *sona* são construídos a partir de uma grelha de pontos equidistantes (*tobe*) desenhados na areia. Os desenhos são feitos sem levantar o dedo ou passar duas vezes por cima da mesma linha.

Após a pesquisa, é importante que os estudantes compartilhem as informações obtidas. Para mais informações sobre como os *sona* podem auxiliar na aprendizagem dos estudantes, acessar o livro de Paulus Gerdes sobre explorações educacionais e matemáticas de desenhos africanos na areia, disponível em <http://www.etnomatematica.org/BOOKS_Gerdes/geometria_sona_de_angola___volume_2__explora%C3%A7%C3%B5es_educacionais_e_matem%C3%A1ticas_de_desenhos_africanos_na_areia.pdf> (acesso em: 6 ago. 2020).

As atividades **2** e **3** têm o objetivo de verificar se os estudantes compreenderam a estrutura dos *sona*. Espera-se que eles percebam que o número de linhas de cada elemento é o mesmo da posição que ele ocupa na sequência e o número de bolinhas em cada linha é igual ao número da posição adicionado a 1; assim, o 4º elemento tem 4 linhas e 5 bolinhas em cada linha. Generalizando, um elemento na posição n terá n linhas com $n + 1$ bolinhas em cada linha.

Introdução

Este tópico faz referência à **sequência de Fibonacci**. Verificar se os estudantes já tiveram contato com essa sequência no Ensino Fundamental e o que recordam disso. Após realizar a leitura das informações fornecidas no boxe **Saiba que...**, pode-se aprofundar a história de Leonardo Fibonacci com o texto a seguir.

[...] nasceu em Pisa, então próspera cidade mercantil italiana, **Leonardo Fibonacci** (1170, 1240?), também conhecido como Leonardo Pisano ou Leonardo de Pisa. Seu pai foi importante funcionário de Pisa e representou, durante algum tempo, os interesses comerciais de sua cidade em Bugia, na atual Argélia, norte da África. Devido às viagens do pai, Leonardo percorreu todo o Mediterrâneo, visitando a Espanha muçulmana, a Sicília, o Levante, conhecendo nestes lugares diversas culturas, familiarizando-se com a Matemática árabe, que era então mais desenvolvida do que a Matemática da Europa Ocidental.

Leonardo se identificava como descendente de Bonacci, provavelmente um antepassado não muito distante. Este costume de referir-se a antepassados mais ou menos ilustres era comum na Itália de então. O uso do cognome Fibonacci para Leonardo é recente e deve-se provavelmente ao historiador matemático Guillaume Libri, em 1838.

[...]

Leonardo impressionou-se muito com os algarismos indo-arábicos, achando-os superiores aos métodos então usados na Europa para registrar os números e operar com eles. Foi um dos responsáveis pela divulgação do sistema de numeração decimal na Europa, por meio de seu *Liber Abaci* escrito em 1202. Neste livro, Fibonacci apresentou um tratamento satisfatório da Aritmética e da Álgebra Elementar. [...]

CARVALHO, J. P. de. Um problema de Fibonacci. **Revista do Professor de Matemática**. RPM 17. Disponível em: http://www.rpm.org.br/cdrpm/17/2.htm. Acesso em: 6 ago. 2020.

Sequências

Para o desenvolvimento do pensamento algébrico, é primordial que os estudantes saibam identificar regularidades e padrões de sequências estabelecendo leis matemáticas para expressá-las, quando elas existirem.

Questionar os estudantes sobre o que sabem de sequências, pedindo exemplos que fazem parte do cotidiano deles. Comentar, então, que existem sequências de fatos, de ideias, de datas, de cores, de números etc.

Destacar que uma sequência implica ordem. Por exemplo: para serem atendidos no banco, os clientes recebem uma senha na entrada. Nem sempre essa senha tem uma ordem que pode ser expressa por uma lei matemática, como números pares, números naturais, mas existe a ordem de atendimento. Há sequências que apresentam padrões que podem ser deduzidos por meio de observações e análises matemáticas. Essas sequências são o objeto principal de estudo do Capítulo.

No primeiro boxe **Pense e responda** deste tópico, orientar os alunos na busca por fontes confiáveis sobre a sequência de Fibonacci, que tenham uma abordagem voltada para o Ensino Médio, como no artigo disponível em <https://repositorio.unb.br/bitstream/10482/31430/1/2017_F%C3%A1bioAlvesBarbosa.pdf> (acesso em: 26 ago. 2020). É interessante comentar sobre a razão áurea e citar como ela pode ser identificada em alguns elementos da natureza (folhas e flores, partes do corpo humano) e em construções feitas pelo ser humano.

Comentar que chamamos de **termo geral** a lei matemática que permite determinar os termos de uma sequência. Os números primos formam uma sequência numérica, no entanto, até hoje não foi possível determinar um termo geral para expressá-la.

No segundo boxe **Pense e responda** desse tópico, é importante verificar se os estudantes compreenderam que, em uma sequência obtida por recorrência, o cálculo de cada termo depende dos termos anteriores, enquanto em uma sequência determinada pelo termo geral (a_n), depende apenas de n.

Comentar com os estudantes que, à primeira vista, a técnica da recorrência pode parecer mais trabalhosa e menos eficiente, por precisar conhecer todos os termos anteriores ao termo desejado. No entanto, esse recurso é frequentemente utilizado na linguagem de programação de computadores, por meio da ideia de funções recursivas, por exemplo, pois os computadores são ferramentas capazes de realizar muitos cálculos em pouco tempo. Apesar disso, é importante conhecer propriedades de funções recursivas para garantir códigos mais eficientes. Desse modo, estimula-se o desenvolvimento do pensamento computacional nos estudantes.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

> ATIVIDADE RESOLVIDA E ATIVIDADES

A atividade resolvida retoma o problema apresentado no boxe **Saiba que...** sobre a sequência de Fibonacci. Ao resolvê-la, os estudantes vão ter contato com os primeiros números dessa sequência. Espera-se que eles percebam que, pelo esquema apresentado, quanto mais meses se passarem, maior será a quantidade de coelhos e isso dificultará a representação da situação por meio de figuras.

Esse mesmo problema é apresentado no vídeo **Eu acho que vi um coelhinho**, produzido pela equipe de Matemática Multimídia da Unicamp-SP, disponível em <https://www.youtube.com/watch?v=T0fa5TEYjdQ&feature=emb_title> (acesso em: 6 ago. 2020).

A seção de Atividades visa trabalhar algumas competências, como estabelecer conjecturas e modelos, por meio da observação de padrões, como descreve a competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**. Utilizando, ainda, elementos da formação de algoritmos para analisar e criar fórmulas de sequências numéricas, desenvolve-se a competência específica **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT405**.

Pedir aos estudantes que compartilhem as estratégias utilizadas para obter as sequências solicitadas nestas atividades. É importante que eles consigam expressar por escrito o modo que pensaram em cada situação. Para complementar, pode-se pedir que criem uma sequência e digam a um colega que escreva os cinco primeiros termos dessa sequência criada. Para isso, eles precisam retomar o conceito de sequência e pensar em qual expressão matemática vão utilizar para que o colega consiga expressar os termos.

Progressão aritmética

Nesse tópico, é importante que os estudantes percebam que: toda sequência em que – a partir de um termo conhecido – soma-se uma constante para obter o termo seguinte, é uma progressão aritmética. Ao longo do estudo desse tópico pretende-se contribuir para o desenvolvimento da competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT507**.

Verificar se os estudantes relacionam os resultados da situação analisada com o contexto apresentado. Para a razão ser igual a 36, significa que a muda teve crescimento mensal de 36 cm. Destacar que a razão indica se a progressão aritmética é crescente ou decrescente. Isso é destacado no boxe **Saiba que...** desse tópico, em que é salientada a importância da ordem nas sequências. Na situação analisada, a razão é positiva, portanto a progressão aritmética é crescente.

FÓRUM

O tema abordado nesse boxe é a restauração florestal, trabalham-se elementos da argumentação e expressão de ideias, desenvolvendo a competência geral **7**. Além disso, trabalha-se a análise de fatos reais para elaborar argumentos, realizar previsões e defender decisões responsáveis, desenvolvendo a competência específica **2** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

É proposta, então, uma pesquisa a respeito de projetos de restauração florestal. Esse trabalho leva os estudantes a explorarem o Tema Contemporâneo Transversal **Educação Ambiental**. Ele pode ser desenvolvido em parceria com os professores da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**. O Ministério do Meio Ambiente tem um programa voltado para a preservação e restauração de florestas, conforme apresentado no texto a seguir.

O Programa Nacional de Florestas (PNF) foi criado pelo Decreto nº 3.420, de 20 de abril de 2000, com o objetivo de articular as políticas públicas setoriais para promover o desenvolvimento sustentável, conciliando o uso com a conservação das florestas brasileiras. É constituído de projetos que são concebidos e executados de forma participativa e integrada pelos governos federal, estaduais, distrital e municipais e a sociedade civil organizada. Esta articulação é feita pelo Ministério do Meio Ambiente.

Com a publicação do Decreto nº 6.101 de 26 de abril de 2007, que definiu a nova estrutura regimental do Ministério do Meio Ambiente, o PNF passou a ser coordenado pelo Departamento de Florestas (DFLOR).

O PNF tem os seguintes objetivos:

- estimular o uso sustentável de florestas nativas e plantadas;
- fomentar as atividades de reflorestamento, notadamente em pequenas propriedades rurais;
- recuperar florestas de preservação permanente, de reserva legal e áreas alteradas;
- apoiar as iniciativas econômicas e sociais das populações que vivem em florestas;
- reprimir desmatamentos ilegais e a extração predatória de produtos e subprodutos florestais, conter queimadas acidentais e prevenir incêndios florestais;
- promover o uso sustentável das florestas de produção, sejam nacionais, estaduais, distrital ou municipais;
- apoiar o desenvolvimento das indústrias de base florestal;
- ampliar os mercados interno e externo de produtos e subprodutos florestais;
- valorizar os aspectos ambientais, sociais e econômicos dos serviços e dos benefícios proporcionados pelas florestas públicas e privadas;
- estimular a proteção da biodiversidade e dos ecossistemas florestais.

[...]

BRASIL. Ministério do Meio Ambiente. **Programa Nacional de Florestas**. Disponível em: https://www.mma.gov.br/florestas/programa-nacional-de-florestas. Acesso em: 6 ago. 2020.

Ao desenvolver o tópico **Termo geral de uma PA**, pedir aos estudantes que acessem o recurso digital disponibilizado no boxe **Para ouvir**. O áudio apresenta a progressão aritmética em uma história inspirada no livro **Alice no País das Maravilhas**, de Lewis Caroll. Após ouvirem a história, propor uma discussão a respeito das impressões que os estudantes tiveram desse recurso digital e se identificaram a presença da progressão aritmética nele. É possível propor a seguinte situação-problema envolvendo essa história:

Supondo que a altura da porta que Alice quer atravessar meça 45 cm e que ela tenha 1,60 m de altura, quantos centímetros ela teria que diminuir a cada gole tomado da poção mágica para alcançar exatamente a altura da porta em cinco goles?

Resolução

A diferença entre as medidas das alturas da Alice e da porta é de 115 cm. Para que 115 cm sejam subtraídos da medida da altura de Alice em exatamente cinco goles, sendo que em cada gole ela diminui uma mesma quantidade, é necessário que cada gole da poção mágica a faça diminuir $\frac{115}{5}$ cm, ou seja 23 cm. Nesse caso, tem-se a seguinte progressão aritmética: (160 cm, 137 cm, 114 cm, 91 cm, 68 cm, 45 cm).

Recomenda-se explicar as afirmações do primeiro boxe **Saiba que...** desse tópico, propondo exemplos de sequências, cujos termos consecutivos sejam representados como é indicado nesse boxe.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Ao desenvolver o tópico **Soma dos termos de uma PA**, propor aos estudantes que apresentem progressões aritméticas com quantidade finita de termos e calculem a soma desses termos.

O objetivo do tópico **Progressão aritmética e função afim** é possibilitar situações matemáticas para que os estudantes reconheçam a progressão aritmética como uma função afim, definida no conjunto dos números inteiros positivos. O boxe **Pense e responda** enfatiza tal fato; espera-se que os estudantes percebam que não é correto traçar uma reta para representar essa situação, pois o domínio da função associada a uma PA é $\mathbb{N}^*$ e não $\mathbb{R}$. No segundo item desse boxe, é esperado que os estudantes percebam que os pontos indicados estão alinhados, pois esses pontos pertencem ao gráfico da função afim $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = a_x + b$, com $a > 0$, que é uma reta. No terceiro item, espera-se que os estudantes concluam que o gráfico de uma PA decrescente é o conjunto de pontos (n, a_n) que fazem parte do gráfico da função afim dada por $h(x) = ax + b$, com $a < 0$, ou seja, h é uma função decrescente.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas e as atividades propostas dessa seção possibilitam identificar e associar progressões aritméticas (PA) a funções afins de domínios discretos, para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas, desenvolvendo a competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT507**.

Explorar detalhes conceituais envolvidos nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas. Caso algum estudante encontre outra maneira de resolver alguma das atividades, propiciar um momento de partilha dessa resolução para verificar os conceitos utilizados por ele.

Espera-se que os estudantes identifiquem os termos gerais das progressões aritméticas, compreendendo a utilidade desses procedimentos para a resolução de problemas e consigam representar graficamente uma progressão aritmética.

Na atividade **18**, é importante que as duplas compartilhem os itens criados utilizando números fracionários para que os estudantes possam ter contato com diferentes progressões aritméticas.

Progressão geométrica

Destacar aos estudantes que uma sequência é uma progressão geométrica quando cada termo, a partir do segundo, é obtido multiplicando o anterior por uma constante. Essa constante é chamada de razão da progressão geométrica, sendo representada pela letra q, e o boxe **Saiba que...** desse tópico ressalta que ela é válida tanto para progressões geométricas finitas como para infinitas. Ao considerar uma mesma razão, as progressões geométricas crescem ou decrescem mais rápido que as progressões aritméticas. Ao longo do estudo desse tópico, pretende-se contribuir para o desenvolvimento da competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT508**.

No tópico **Termo geral de uma PG**, ao explorar o boxe **Saiba que...**, aproveitar o produto dos três termos apresentados anteriormente e questionar os estudantes: se é conhecido o produto de três termos consecutivos, como descobrir o valor do termo central? Espera-se que eles percebam que basta calcular a raiz cúbica desse produto. O mesmo raciocínio pode ser utilizado caso o produto de cinco termos consecutivos seja conhecido; neste caso, calcula-se a raiz quinta do produto. Para cálculos mais complexos como esse, pode-se sugerir o uso de uma calculadora científica.

Reservar um momento da aula, se possível, para que os estudantes possam assistir ao vídeo indicado no boxe **Para assistir**, que tem o objetivo de apresentar o conceito de progressão geométrica de forma lúdica. É uma ficção sobre o risco de pandemia de gripe aviária, que apresenta uma evolução em progressão geométrica. Para saber mais a respeito da gripe aviária, ler o texto a seguir.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Gripe Aviária

A gripe aviária é resultado da infecção das aves pelo vírus da influenza, cujas cepas são classificadas ou de baixa ou de alta patogenicidade, de acordo com a capacidade de provocarem doença leve ou grave nesses animais.

Todas as aves são consideradas suscetíveis à infecção, embora algumas espécies sejam mais resistentes que outras. A doença provoca vários sintomas nas aves, os quais variam de uma forma leve até uma doença altamente contagiosa e extremamente fatal que pode resultar em grandes epidemias. Esta é conhecida como "gripe aviária de alta patogenicidade" e se caracteriza por início súbito, sintomas graves e morte rápida, com taxa de mortalidade próxima a 100%.

[...]

A transmissão entre diferentes espécies de aves dá-se por contatos diretos ou indiretos de aves domésticas com aves aquáticas migratórias (principalmente patos selvagens), as quais são reservatórios naturais do vírus e também mais resistentes às infecções, têm sido a principal causa das epidemias. A exposição direta a aves infectadas ou a suas fezes (ou à terra contaminada com fezes) pode resultar na infecção humana.

[...]

GRIPE Aviária. **Biblioteca de Saúde Pública**. Disponível em: http://www.fiocruz.br/bibsp/cgi/cgilua.exe/sys/start.htm?UserActiveTemplate=bibsp&infoid=156&sid=106. Acesso em: 7 ago. 2020.

Após desenvolver os tópicos **Soma dos termos de uma PG finita** e **Soma dos termos de uma PG infinita**, verificar se os estudantes compreenderam a notação de limite utilizada no caso da progressão geométrica infinita. Para complementar a informação apresentada, pode-se comentar que, para $q \in \mathbb{R}$, com $q > 1$, tem-se q^n aumentando quando n aumenta (não se aproximando de nenhum número real); logo, só é possível calcular a soma dos termos de uma progressão geométrica infinita quando $|q| < 1$.

No tópico **Progressão geométrica e função exponencial**, comentar que é possível definir uma progressão geométrica de razão negativa; porém, nesse caso, não se associa essa progressão a uma função exponencial, que só está definida para bases positivas. Enfatizar que a progressão geométrica é um caso particular da função exponencial com domínio em $\mathbb{N}^*$. Enfatizar a diferença de notação da função exponencial relacionada à PG, como descrito no boxe **Saiba que...** desse tópico.

No primeiro item do boxe **Pense e responda** deste tópico, espera-se que os estudantes concluam que os pontos indicados não estão alinhados, pois esses pontos pertencem ao gráfico da função exponencial $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(n) = a^n$, com $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ e $a \neq 1$, que é uma curva. No segundo item, espera-se que os estudantes respondam que não se pode traçar uma curva ligando os pontos, pois o domínio da função associada a uma PG é $\mathbb{N}^*$ e não $\mathbb{R}$.

> ATIVIDADES RESOLVIDAS E ATIVIDADES

As atividades resolvidas possibilitam identificar e associar progressões geométricas (PG) a funções exponenciais de domínios discretos para análise de propriedades, dedução de algumas fórmulas e resolução de problemas, desenvolvendo a competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT508**.

Ao desenvolver as atividades, verificar se os estudantes percebem as diferenças das resoluções caso estivessem envolvidas as progressões aritméticas ao invés das geométricas. Explorar detalhes conceituais nas resoluções para proporcionar a compreensão dos conceitos e sanar dúvidas.

A seção **Atividades**, assim como a seção **Atividades resolvidas**, também desenvolve a habilidade **EM13MAT508**.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Espera-se que os estudantes identifiquem os termos gerais das progressões geométricas, compreendendo a utilidade desses procedimentos para a resolução de problemas.

Aproveitar o tema da atividade **45**, que menciona a lei de Titius-Bode, para indicar aos estudantes o áudio produzido pela equipe de Matemática Multimídia da Unicamp, disponível em <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1323> (acesso em: 7 ago. 2020). Esse material relaciona a lei de Titius-Bode às progressões geométricas de maneira interessante.

Para complementar as atividades, propor aos estudantes que elaborem individualmente um problema, com base em algum dos conceitos de progressão geométrica estudados no Capítulo, e depois o troquem com um colega, que deverá resolvê-lo também. Por fim, conferir as resoluções com os estudantes.

EXPLORANDO A TECNOLOGIA

Nessa seção, são apresentados os fluxogramas e suas partes, além da relação destes com algoritmos, de modo a contribuir para o desenvolvimento das competências específicas **3** e **4** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidades **EM13MAT315** e **EM13MAT405** e do pensamento computacional. Ao final da seção, é proposto que representem um algoritmo na forma de fluxograma. Se possível, realizar essa atividade em um laboratório de informática, utilizando um *software* gratuito, favorecendo o desenvolvimento da competência geral **5**. O texto a seguir orienta como criar um fluxograma utilizando o *software* **LibreOffice**.

Para criar um fluxograma:

1. Selecione uma ferramenta da barra de ferramentas **Fluxograma** na barra **Desenho**.
2. Arraste uma forma no diapositivo.
3. Para adicionar mais formas, repita os últimos passos.
4. Abra a barra de ferramentas **Conectores** na barra **Desenho**, e selecione uma linha de conector.
5. Mova o indicador para cima da extremidade de uma forma de modo a que surjam pontos de ligação.
6. Clique num ponto de ligação, arraste até um ponto de ligação noutra forma, e então solte.
7. Para adicionar mais conectores, repita os últimos passos.

Agora tem o esquema básico para o fluxograma.

Para adicionar texto ao fluxograma

Execute um dos seguintes procedimentos:

- Clique duas vezes na forma, e digite ou cole o texto.
- Clique no ícone **Texto** na barra **Desenho**, e arraste um objeto de texto sobre a forma. Introduza ou cole o texto no objeto de texto.

Para adicionar uma cor de preenchimento a uma forma:

1. Selecione a forma, e escolha **Formatar - Área**.
2. Selecione **Cor** e, em, seguida, clique numa cor da lista.

[...]

CRIAR um fluxograma. **LibreOffice**. Disponível em: https://help.libreoffice.org/3.4/Impress/Creating_a_Flowchart/pt. Acesso em: 7 ago. 2020.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Conversar com os estudantes a respeito de como os fluxogramas podem colaborar para o aprendizado de conceitos matemáticos. Verificar se eles já tiveram contato com algum fluxograma e pedir que comentem a experiência, o que favorece a capacidade expor ideias e argumentos, de acordo com a competência geral **7**.

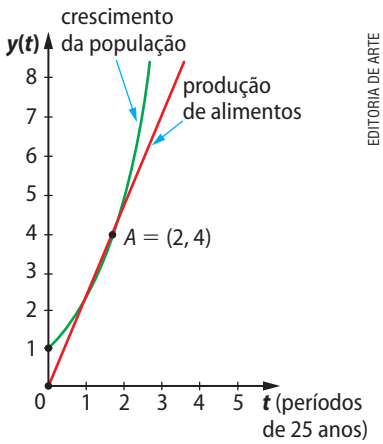
Na atividade **1**, os estudantes devem definir valores para x, r e i, sendo, respectivamente, o termo inicial, a razão e a quantidade de termos de uma progressão aritmética finita. Há diversas respostas possíveis. Considerando $x = 4$, $r = 12$ e $i = 5$, tem-se (4, 16, 28, 40, 52).

As respostas das atividades **2** e **3** são pessoais, pois os estudantes devem escolher algum conceito estudado no Capítulo para construir um fluxograma e utilizar algo que eles consideram fazer muito bem para elaborar outro fluxograma, o que favorece a tomada de decisões autônomas e responsáveis, como prevê a competência geral **10**. Na atividade **3**, é importante incentivar os estudantes a analisar, valorizar e validar os fluxogramas elaborados pelos colegas. Desse modo, os estudantes são estimulados a fazer a correção dos fluxogramas realizados, promovendo a avaliação por pares.

CONEXÕES

O tema da seção diz respeito às teorias demográficas e é uma boa oportunidade para trabalhar em parceria com os professores das áreas de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias** e de **Ciências Humanas e Sociais Aplicadas**. A seção proporciona a investigação de uma situação-problema por meio do conhecimento científico e tecnológico, contribuindo com o desenvolvimento da competência específica **3** da área de **Ciências da Natureza e suas Tecnologias**.

Na atividade **1**, espera-se que os estudantes construam um gráfico, conforme ao lado, indicando o crescimento da população, por meio de uma curva exponencial, e o crescimento da produção de alimentos, indicado por uma reta. Essas curvas devem se interceptar em um ponto, que corresponde ao colapso na oferta de alimentos, conforme previsão de Malthus.



EDITORIA DE ARTE

Nota-se que o ponto do gráfico que indica o colapso na relação dos alimentos e da população é quando o crescimento populacional ultrapassa a produção de alimentos.

Na atividade **2**, os estudantes precisam considerar o dado informado: em 1798 a população mundial era de aproximadamente 1 bilhão de habitantes. Segundo a teoria populacional apresentada, esse valor dobrava a cada 25 anos, portanto, no ano de 2000, a população seria de 256 bilhões de pessoas (2^8).

A atividade **3** propõe uma pesquisa a respeito da teoria reformista, cujas ideias básicas são: adoção de profundas reformas sociais e econômicas para superar os graves problemas dos países subdesenvolvidos. À medida que as famílias obtêm condições dignas de vida, tendem a diminuir o número de filhos para não comprometer o acesso de seus dependentes aos sistemas de educação e saúde. Por outro lado, a teoria malthusiana descartava a utilização de métodos contraceptivos para limitar o crescimento populacional; para os defensores dessa teoria, a solução estaria no controle da natalidade, sendo que o referido controle deveria basear-se na sujeição moral do homem (casamento tardio, abstinência sexual etc.).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

O texto a seguir traz informações sobre a teoria reformista.

> [...]
>
> Contrários às teorias Malthusiana e Neomalthusiana, que atribuem ao grande crescimento populacional dos países subdesenvolvidos a culpa pelo estado de pobreza e fome, os reformistas ou marxistas admitem que a situação de pobreza e subdesenvolvimento, a que foi submetido os países subdesenvolvidos, é a responsável pelo acelerado crescimento demográfico e consequente estado de fome e miséria. [...]
>
> [...] os reformistas defendem a adoção de profundas reformas sociais e econômicas para superar os graves problemas dos países subdesenvolvidos. A redução do crescimento viria como consequência de tais reformas. Eles citam o exemplo dos países desenvolvidos, cuja redução do crescimento só foi possível após a adoção de reformas socioeconômicas e consequente melhoria do padrão de vida das suas populações.
>
> [...]
>
> FONTANA, R. L. M. *et al*. Teorias demográficas e o crescimento populacional no mundo. **Cadernos de Graduação - Ciências Humanas e Sociais – Unit**, v. 2, n. 3, p. 113-124, mar. 2015. Disponível em: https://periodicos.set.edu.br/index.php/cadernohumanas/article/view/1951. Acesso em: 29 jun. 2020.

HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

Nessa seção, é apresentada a história de Gauss relacionada à soma dos números de 1 a 100. Comentar com os estudantes que até hoje não se sabe se o fato descrito realmente ocorreu. A seção aborda a soma de uma progressão aritmética, contribuindo para o desenvolvimento da competência específica **5** da área de **Matemática e suas Tecnologias**, habilidade **EM13MAT507**.

Após explorar o texto com os estudantes, verificar se eles compreendem como Gauss chegou à fórmula da soma dos termos de uma progressão aritmética. A seguir, pode-se notar um padrão para chegar à fórmula.

$1 + 100 = 101$
$2 + 99 = 101$
$3 + 98 = 101$
$4 + 97 = 101$
$5 + 96 = 101$
$\vdots$
$50 + 51 = 101$

Há 100 números de 1 a 100, portanto, pode-se associar esses números de dois em dois, obtendo 50 parcelas de 101. Assim, tem-se:

$$\frac{100 \cdot 101}{2} - 5\,050$$

A sequência (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., 95, 96, 97, 98, 99, 100) é um PA de razão 1.

Para aprofundar a história de Gauss, pode-se apresentar o texto a seguir.

> Carl Friedrich Gauss nasceu em 1777 e viveu até 1855. É considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Gauss teve a estatura de Arquimedes e de Newton, e seus campos de interesse excederam os de ambos. Gauss contribuiu para todos os ramos da Matemática e para a Teoria dos Números. Seu pai era jardineiro e assistente de um comerciante, e enquanto criança mostrou grande talento para a matemática. Sua produção intelectual foi precoce; [...]

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

[...] Gauss ingressou na universidade em outubro de 1795. Em seu primeiro semestre na universidade fez uma brilhante descoberta que o homem buscava a mais de 2000 anos como construir com compasso e esquadro. Esta descoberta foi comemorada com o início de seu diário que durante os próximos 18 anos foi testemunha de muitas de suas descobertas. Dentre suas descobertas nos tempos de estudante as mais significativas são a do método dos mínimos quadrados, a prova da reciprocidade quadrática na teoria dos números.

[...]

Após a metade da década de 1820 Gauss se rendeu às pressões financeiras, e aos problemas de saúde e de família. Os estudos de Gauss tiveram seu início formal em 1829 com estudos sobre o campo magnético terrestre, porém Gauss mostrou pouca experiência para realizar medições, o que tornou valiosa a colaboração de Weber, um jovem e brilhante físico. Em outubro deste ano Gauss voltou-se a estender seus conhecimentos no campo da física, começando a trabalhar em problemas de física teórica, especialmente em mecânica, capilaridade, acústica, óptica e cristalografia, tendo como primeiro fruto destes trabalhos o "UBER EIN NEUES ALLGEMEINES GRUNDGESETZ DER MECHANIK".

[...]

AMARAL, D. A. Gauss, Carl Friedrich (1777-1855). **FEM/Unicamp**, c2020. Disponível em: http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/gauss.htm. Acesso em: 6 ago. 2020.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES

Espera-se que os estudantes consolidem o aprendizado de sequências, progressões geométricas e aritméticas ao desenvolverem as atividades propostas nessa seção. Para isso, solicitar aos estudantes que justifiquem a alternativa correta em cada uma das atividades, a fim de exercitar a escrita matemática a partir dos conceitos presentes em cada situação. As atividades complementares também podem ser utilizadas como parte da avaliação dos estudantes, solicitando que entreguem a resolução de algumas atividades selecionadas.

A atividade **14** explora a soma dos números ímpares consecutivos, a partir do número 1. Pode-se aprofundá-la, solicitando aos estudantes que determinem, também, a soma dos números pares consecutivos de 1 a 100. Espera-se que eles encontrem 2 550 como resultado, ao aplicar o conceito da soma dos termos de uma progressão aritmética finita.

A atividade **22** explora um fractal. Verificar se os estudantes sabem o que é um fractal e se percebem que eles são construídos a partir de uma regularidade. Se achar pertinente, solicitar uma pesquisa sobre esse tema. O texto a seguir traz algumas informações a respeito do assunto.

O que as galáxias, as nuvens, o sistema nervoso, as montanhas e o litoral têm em comum?

Todos contêm padrões intermináveis conhecidos como fractais.

Os fractais são ferramentas importantes em diversas áreas — desde estudos sobre as mudanças climáticas e a trajetória de meteoritos até pesquisas sobre o câncer (ajudando a identificar o crescimento de células mutantes) e a criação de filmes de animação.

[...]

O termo foi cunhado por um cientista pouco convencional chamado Benoit Mandelbrot, um matemático polonês nacionalizado francês e, depois, americano.

[...]

Imagine nuvens, montanhas, brócolis e samambaias... suas formas têm algo em comum, algo intuitivo, acessível e estético.

Se você observar com atenção, vai descobrir que a complexidade deles ainda está presente em uma escala menor.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Subjacente a quase todas as formas no mundo natural, existe um princípio matemático conhecido como autossimilaridade, que descreve qualquer coisa em que a mesma forma se repete sucessivamente em escalas cada vez menores.

Um bom exemplo disso são os galhos de árvores.

Eles se bifurcam várias vezes, repetindo esse simples processo sucessivamente em escalas cada vez menores.

O mesmo princípio de ramificação se aplica à estrutura dos nossos pulmões e à maneira como os vasos sanguíneos são distribuídos pelo nosso corpo.

[...]

VENTURA, D. O que são os fractais, padrões matemáticos infinitos apelidados de 'impressão digital de Deus'. **BBC News Mundo**. 4 dez. 2019. Disponível em: https://www.bbc.com/portuguese/geral-50656301. Acesso em: 7 ago. 2020.

Na atividade **25**, se necessário, retomar o conceito de fluxograma para que os estudantes consigam aplicá-lo na resolução da atividade.

Espera-se, ainda, que os estudantes percebam que a atividade **31** também apresenta um fractal particular: o triângulo de Sierpinski.

PARA REFLETIR

Essa seção relaciona os assuntos abordados neste Capítulo, possibilitando aos estudantes realizar questionamentos que auxiliam na reflexão dos conteúdos desenvolvidos. É importante preparar um momento da aula para que as respostas das questões sejam compartilhadas. Algumas delas são de autoavaliação e outras são de retomada de conceitos.

No primeiro e segundo itens, os estudantes precisam relembrar o que eles estudaram a respeito dos temas trabalhados no Capítulo e o que eles conhecem atualmente. Assim, vão conseguir perceber o quanto se desenvolveram em relação a esses temas.

No terceiro item, espera-se que os estudantes lembrem que, para determinar todos os termos de uma sequência finita, basta conhecer a razão dessa sequência e algum dos termos.

No quarto item, eles podem supor que o 1º e o 3º termos dessa PA são, respectivamente, a_1 e $a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$. Assim, calculando a diferença entre esses termos, descobre-se a razão. Em outras palavras, calcula-se a diferença entre esses dois termos e divide-se o resultado por 2 para obter a razão. Finalmente, basta adicionar a razão ao 1º termo ou subtraí-la do 3º termo para determinar o 2º termo.

O quinto item retoma a representação gráfica de uma PA e uma PG. Espera-se que os estudantes associem a PA a uma função afim e a PG a uma função exponencial, ambas com domínio natural não nulo.

O sexto item retoma a importância do fluxograma. Espera-se que os estudantes indiquem uma maneira de obter a soma dos termos de uma PA ou de uma PG, a partir de um fluxograma. Para a PA, deve-se considerar o termo inicial, a razão e a quantidade de termos; com isso, é possível obter o termo final e calcular a soma dos termos. Para a PG, deve-se considerar o termo inicial, a razão e a quantidade de termos. Em algum momento do fluxograma, deve-se verificar se a razão está entre -1 e 1 (para o caso das progressões infinitas).

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Capítulo 1 • Função definida por mais de uma sentença

Atividades

1. a] Como a porcentagem aplicada é relacionada à faixa de unidades vendidas e instaladas, a função é definida por mais de uma sentença.

b] Do enunciado, sabe-se que cada alarme custa R$ 120,00, para calcular o valor utilizando a porcentagem de cada unidade, deve-se realizar o seguinte procedimento:

De 1 a 25: $120 \cdot \frac{3}{100} = 3{,}6$

De 26 a 50: $120 \cdot \frac{7}{100} = 8{,}4$

De 51 a 75: $120 \cdot \frac{12}{100} = 14{,}4$

De 76 a 100: $120 \cdot \frac{17}{100} = 20{,}4$

Mais de 100: $120 \cdot \frac{22}{100} = 26{,}4$

Agora, basta determinar a lei de formação da função com base no valor fixo recebido acrescido da porcentagem por unidade no intervalo indicado no quadro do enunciado, portanto:

$$f(x) = \begin{cases} 1200, \text{ se } x = 0 \\ 1200 + 3{,}6x, \text{ se } 0 < x \leqslant 25 \\ 1200 + 8{,}4x, \text{ se } 25 < x \leqslant 50 \\ 1200 + 14{,}4x, \text{ se } 50 < x \leqslant 75 \\ 1200 + 20{,}4x, \text{ se } 75 < x \leqslant 100 \\ 1200 + 26{,}4x, \text{ se } x > 100 \end{cases}$$

c] Neste caso, deve-se observar o intervalo que se encaixa o valor dado (82 alarmes) e aplicar na função f correspondente:

$f(x) = 1200 + 20{,}4x \Rightarrow f(82) = 1200 + 20{,}4 \cdot 82 = 2872{,}8$

Portanto, R$ 2.872,80

d] Considerando que o funcionário recebeu R$ 1.502,40, supõe-se que o vendedor vendeu até 25 alarmes. Então:

$1\,502{,}4 = 1\,200 + 3{,}6x \Rightarrow 3{,}6x = 302{,}40 \Rightarrow x = 84$

Portanto, como $84 > 25$, sabe-se que o vendedor vendeu mais de 25 alarmes.

Supondo que ele vendeu entre 25 e 50 alarmes, conclui-se que:

$1\,502{,}4 = 1\,200 + 8{,}4x \Rightarrow 8{,}4x = 302{,}40 \Rightarrow x = 36$.

Como $25 < 36 < 50$, pode-se concluir que o funcionário vendeu 36 alarmes.

2. a] Observe que $3 \leqslant 3$, então pode-se utilizar:

$f(x) = 4x - 1$. Dessa forma, substituindo x por 3 obtém-se:

$f(3) = 4 \cdot 3 - 1 = 12 - 1 \Rightarrow f(3) = 11$

Como $5 \geqslant 1$, então deve-se utilizar $g(x) = -x$. Dessa forma, substituindo x por 5 obtém-se:

$g(5) = -5$.

Portanto, $f(3) - g(5) = 11 - (-5) = 11 + 5 = 16$

b] Observe que $0 < 1$, então pode-se utilizar:

$g(x) = x^2 + 4x + 3$. Dessa forma, substituindo x por 0 obtém-se $g(0) = 0^2 + 4 \cdot 0 + 3 \Rightarrow g(0) = 3$

Como $-1 \leqslant 3$, então pode-se utilizar:

$f(x) = 4x - 1$. Dessa forma,

$f(-1) = 4 \cdot (-1) - 1 = -4 - 1 \Rightarrow f(-1) = -5$

Portanto, $g(0) + 2 \cdot f(-1) = 3 + 2 \cdot (-5) = 3 - 10 = -7$

c] Observe que $4 \geqslant 5$, então pode-se utilizar:

$f(x) = x^2 + 2$. Dessa forma, substituindo x por 4 obtém-se $f(4) = 4^2 + 2 = 16 + 2 \Rightarrow f(4) = 18$

Como $1 \geqslant 1$, então pode-se utilizar:

$g(x) = -x$. Dessa forma, substituindo x por 1 obtém-se $g(1) = -1$.

Portanto: $\frac{f(4)}{g(1)} = \frac{18}{-1} = -18$

3. a] Como $f(x) = 0$, deve-se substituir na lei da função. Então:

$3x + 4 = 0 \Rightarrow 3x = -4 \Rightarrow x = -\frac{4}{3}$

$x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

Assim, para $f(x) = 0$ obtém-se:

$x = -\frac{4}{3}$ ou $x = 2$.

b] Como $f(x) = -2$, deve-se substituir na função definida por duas sentenças. Então:

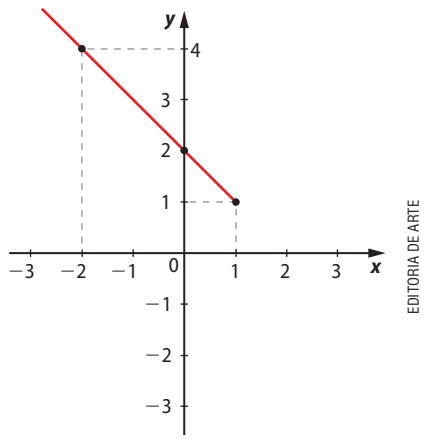
$3x + 4 = -2 \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2$

$x - 2 = -2 \Rightarrow x = 0$

Assim, para $f(x) = -2$, obtém-se: $x = -2$ ou $x = 0$.

4. a] A função f é formada por partes de duas sentenças, sendo uma função afim f_1 e uma função quadrática f_2. Para traçar o gráfico da função afim f_1, determinam-se dois pontos pertencentes ao gráfico, além do extremo $x = 1$. Como a função f_1 é válida para $x \leqslant 1$, a bolinha é fechada no ponto em que $x = 1$. Assim:

x	$f_1(x) = -x + 2$	(x, y)
-2	$f_1(-2) = -(-2) + 2 = 2 + 2 = 4$	$(-2, 4)$
0	$f_1(0) = -(0) + 2 = 0 + 2 = 2$	$(0, 2)$
1	$f_1(1) = -(1) + 2 = -1 + 2 = 1$	$(1, 1)$



EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Para traçar o gráfico da função quadrática f_2, determinam-se o vértice da parábola, os zeros e outro ponto pertencente ao gráfico, além do extremo $x = 1$. Como a função f_2 é válida para $x > 1$, a bolinha é aberta no ponto em que $x = 1$.

Assim:

$f_2(x) = -x^2 + 2x$, se $x > 1$

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$

$f_2(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 = -1 + 2 = 1$

Então o vértice da parábola é o ponto (1, 1), que é o extremo do domínio da função f_2.

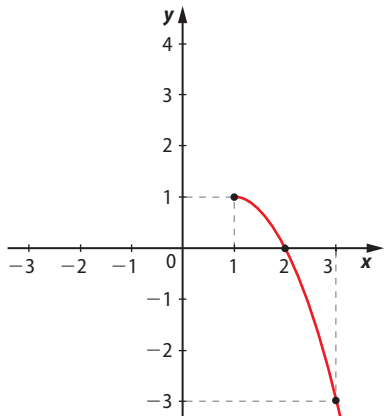
Para traçar o gráfico, também é necessário encontrar os zeros da função; para isso iguala-se $f_2(x) = 0$

$-x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x + 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $x = 2$

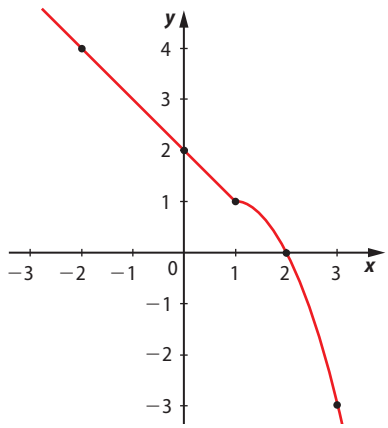
Como $x = 0$ não faz parte do domínio de f_2, então obtém-se o ponto (2, 0).

Além disso, calcula-se mais um ponto para essa função. Considere o valor da função para $x = 3$:

$f_2(3) = -3^2 + 2 \cdot 3 = -9 + 6 = -3$



Portanto, reunindo os gráficos de f_1 e f_2 em um mesmo plano cartesiano, obtém-se o gráfico da função f:



b) Para traçar o gráfico da função g, usa-se a mesma ideia do item **a**, na qual g_1 representa uma função quadrática e g_2 representa uma função afim. Assim:

$g_1(x) = x^2 + 6x + 8$, se $x \leq -2$

Para encontrar o vértice da função quadrática será necessário utilizar a fórmula:

$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2 \cdot 1} = \frac{-6}{2} = -3$

$g_1(-3) = (-3)^2 + 6 \cdot (-3) + 8 = 9 - 18 + 8 = -1$

Então o vértice da $g_1(x)$ é $V(-3, -1)$.

Para encontrar os zeros da g_1, precisa-se igualar a zero, então:

$x^2 + 6x + 8 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 3 = \pm 1 \Rightarrow x + 3 = 1$ ou $x + 3 = -1 \Rightarrow x = -2$ ou $x = -4$

Para $x = -5$:

$g_1(-5) = (-5)^2 + 6 \cdot (-5) + 8 = 25 - 30 + 8 = 3$.

Para traçar o gráfico da função g_2 que representa uma função afim, obtém-se:

- $g_2(x) = -2x + 3$, se $x > -2$;
- g_2 é uma função afim decrescente.

Para encontrar o zero da função, precisa-se igualar $g_2(x) = 0$, então:

$-2x + 3 = 0 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

Para identificarmos a intersecção com o eixo y, obtém-se $x = 0$, então:

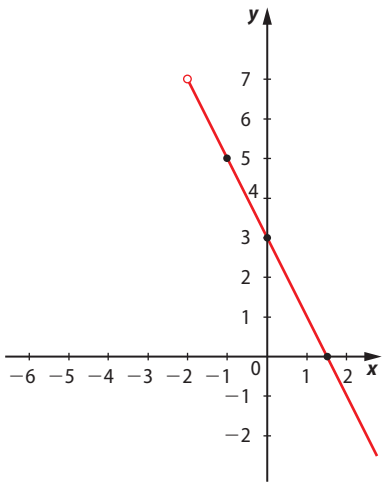
$g_2(0) = -2 \cdot 0 + 3 = 0 + 3 = 3$

Também se verifica o valor de g_2 para $x = -1$ e para $x = -2$ e obtém-se:

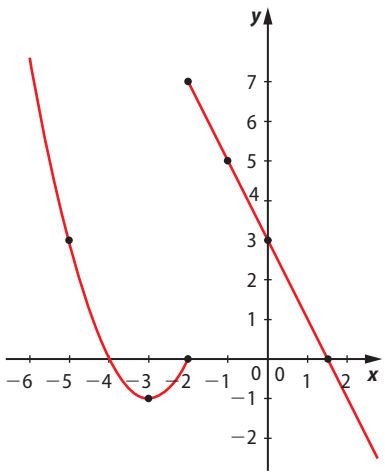
$g_2(-1) = -2 \cdot (-1) + 3 = 2 + 3 = 5$

$g_2(-2) = -2 \cdot (-2) + 3 = 4 + 3 = 7$

Dessa forma, pode-se obter o seguinte gráfico:



Após construir os gráficos g_1 com g_2, obtém-se o gráfico da função g:



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

5. Com base na análise do gráfico, percebe-se que se trata de uma função definida por três sentenças, em que a primeira delas (g_1) corresponde a uma função afim decrescente, a segunda sentença (g_2) representa uma função constante e a terceira sentença (g_3) representa uma função afim crescente.

A lei geral de formação de uma função afim é $g(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$; então, com dois pontos para cada sentença é possível determinar a lei da função.

Observe que os pontos $(-3, 0)$ e $(-1, -2)$ fazem parte do gráfico de $g_1(x) = ax + b$.

Substituindo e resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ -a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -1 \text{ e } b = -3$$

Portanto, $g_1(x) = -x - 3$, para $x \leqslant -1$.

A segunda sentença do gráfico corresponde à função constante $g_2(x) = -2$, para $-1 < x \leqslant 1$.

Os pontos $(1, -2)$ e $(3, 0)$ fazem parte do gráfico de $g_3(x) = ax + b$. Substituindo e resolvendo o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} a + b = -2 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = -3$$

Portanto, $g_3(x) = x - 3$

Assim, a lei de formação da função g é:

$$g(x) = \begin{cases} -x - 3, \text{ se } x \leqslant -1 \\ -2, \text{ se } -1 < x \leqslant 1. \\ x - 3, \text{ se } x > 1 \end{cases}$$

6. a] Resposta pessoal.

b] Pesquisa dos estudantes. O PIS (Programa de Integração Social) e a Cofins (Contribuição para Financiamento da Seguridade Social) são dois tributos que incidem sobre a receita bruta das empresas. O ICMS (Imposto sobre Operações relativas à Circulação de Mercadorias e sobre Prestações de Serviços de Transporte Interestadual e de Comunicação) é um tributo considerado essencial para os estados, incidindo em quase todas as operações comerciais, como compra de alimentos, eletrodomésticos, roupas, combustível etc. A alíquota varia de estado para estado.

c] Resposta possível:

$$f(x) = \begin{cases} 7{,}75 + 1{,}25x, \text{ se } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 11{,}38 + 6{,}38(x - 1), \text{ se } 1 < x \leqslant 3 \\ 24{,}14 + 2{,}85(x - 3), \text{ se } 3 < x \leqslant 7 \\ 36{,}81 + 5{,}39(x - 7), \text{ se } 7 < x \leqslant 14 \\ 75{,}81 + 6{,}59(x - 14), \text{ se } 14 < x \leqslant 34 \end{cases}$$

d] A resposta depende do consumo verificado pelos estudantes. Orientar os estudantes sobre o fato de que o valor obtido por meio da lei dessa função não inclui a cobrança de ICMS, mas que eles podem pesquisar a alíquota cobrada no estado onde moram e multiplicar pelo valor obtido para ter uma ideia do valor total a ser pago à concessionária. Para fazer a estimativa, eles podem considerar que um botijão de GLP de 13 kg tem o equivalente a cerca de 5,2 m^3 de gás. Mais informações sobre GLP podem ser obtidas em <https://www.ultragaz.com.br/residencial/ultradicas/o-que-voce-precisa-saber-sobre-seu-botijao-de-gas> (acesso em: 16 jun. 2020).

7. a] Da definição sabe-se que f é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio é imagem de pelo menos um elemento do domínio da função. Portanto é **apenas sobrejetora**, pois não sobram elementos no conjunto imagem Im $= B$. Não é injetora, pois o elemento do conjunto B é imagem de todos os elementos de A simultaneamente. Como a função é sobrejetora, mas não é injetora, não pode ser bijetora.

b] **Nem sobrejetora nem injetora**, visto que sobram elementos em B (não sobrejetora) e existe pelo menos um elemento em B que é imagem de mais de um elemento de A simultaneamente (não injetora). Neste caso, o elemento 4 é imagem de -2 e 2.

c] Da definição sabe-se que uma função é bijetora quando ela é sobrejetora e injetora, simultaneamente. Portanto, é **bijetora**, porque não sobram elementos em B (sobrejetora) e cada elemento em A corresponde a um único elemento em B (injetora).

d] Da definição sabe-se que f é injetora quando os elementos distintos de um conjunto são associados por f a elementos distintos de outro conjunto. Portanto, é **apenas injetora**, porque cada elemento em B corresponde a um único elemento em A. Não é sobrejetora, pois sobram elementos em B. Portanto, não é bijetora.

8. No item **a**, a função é apenas sobrejetora, uma vez que não sobram elementos no contradomínio. Não é injetora, pois existem elementos do contradomínio que são a imagem de mais de um elemento do domínio simultaneamente. Como a função é sobrejetora, mas não é injetora, não pode ser bijetora.

No item **b**, a função é injetora, mas não é sobrejetora, visto que o contradomínio da função é estritamente positivo. Como a função é injetora, mas não é sobrejetora, não pode ser bijetora.

No item **c**, a função não é sobrejetora nem injetora, visto que não há elementos correspondentes no contradomínio para todos os elementos do domínio (não sobrejetora) e existe pelo menos um elemento do contradomínio que é imagem de mais de um elemento no domínio simultaneamente (não injetora).

No item **d**, a função é bijetora, pois, para cada elemento do contradomínio, existe um único elemento correspondente no domínio (injetora) e não há elementos do domínio que possuem a mesma imagem simultaneamente no contradomínio (sobrejetora).

Resposta: alternativa **d**

9. Analisando cada afirmação, obtêm-se:

- f é uma função injetora. **Falso**, pois existem elementos do contradomínio que são a imagem de mais de um elemento do domínio simultaneamente.
- O domínio de f é o intervalo $]-2; 3]$. **Falso**, pois esse intervalo corresponde ao contradomínio.
- $f(x) = 2$, para todo $2 \leqslant x \leqslant 4$. **Falso**, pois $f(4) = 3$.
- $f(x) \geqslant 0$, para $\forall\, x \in \left[-\frac{5}{2}; 0\right] \cup [1; 5]$. **Verdadeiro**.

Resposta: alternativa **a**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

10. Do enunciado, tem-se que $f(x) = x^2 + 2x$ e $g(x) = 1 - 3x$, então para determinar $f(g(x))$, em cada item, aplica-se a definição de função composta, ou seja:

a] $f(g(x)) = (1 - 3x)^2 + 2(1 - 3x)$
$f(g(x)) = 1 - 6x + 9x^2 + 2 - 6x$
$f(g(x)) = 9x^2 - 12x + 3$

b] $g(f(x)) = 1 - 3(x^2 + 2x)$
$g(f(x)) = 1 - 3x^2 - 6x$
$g(f(x)) = -3x^2 - 6x + 1$

c] $(f \circ f)(x) = (x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x)$
$(f \circ f)(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 2x^2 + 4x$
$(f \circ f)(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x$

d] $(g \circ g)(x) = 1 - 3(1 - 3x)$
$(g \circ g)(x) = 1 - 3 + 9x$
$(g \circ g)(x) = 9x - 2$

11. Do enunciado, obtém-se que: $f(x) = 3x + 5$ e $g(x) = 2x - 3$, então, para encontrar o valor de x, em cada item, aplica-se a definição de função composta e, em seguida, encontra-se o zero da função.

a] $3(2x - 3) + 5 = 0$
$6x - 9 + 5 = 0$
$6x = 4$
$x = \frac{4}{6} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$

b] $2(3x + 5) - 3 = 0$
$6x + 10 - 3 = 0$
$6x = -7$
$x = -\frac{7}{6}$

12. Do enunciado, obtém-se que: $f(x) = \frac{1}{x - 1}$ para calcular o valor de x, sabendo que $f(f(x)) = 1$. Precisa-se resolver:

$$f(f(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\frac{1-x+1}{x-1}} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{-x+2}{x-1}} = 1 \Rightarrow 1 \cdot \frac{x-1}{-x+2} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 = -x + 2 \Rightarrow x + x = 2 + 1 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

13. Do enunciado, obtém-se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^2 - 2x - 3$ e uma função $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $g(x) = 4x + m$. Sabe-se também que $f(g(-1)) = 12$. Para encontrar o valor de m, precisa-se fazer:

$f(g(x)) = (4x + m)^2 - 2(4x + m) - 3$
$f(g(x)) = 16x^2 + 8xm + m^2 - 8x - 2m - 3$
$f(g(-1)) = 16(-1)^2 + 8(-1)m + m^2 - 8(-1) - 2m - 3$
$f(g(-1)) = 16 - 8m + m^2 + 8 - 2m - 3$
$f(g(-1)) = m^2 - 10m + 21$
$m^2 - 10m + 21 = 12$
$m^2 - 10m + 9 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 1$ e $x'' = 9$. Portanto, o valor de m é 1 ou 9.

14. Do enunciado, obtém-se que $f(x) = 5x + 1$ e $h(x) = 1 + 4x$, então para calcular $f(h(2)) + h(f(2))$, precisa-se fazer:

$f(h(x)) = 5(1 + 4x) + 1$
$f(h(x)) = 5 + 20x + 1$
$f(h(x)) = 20x + 6$
$f(h(2)) = 20 \cdot 2 + 6 = 46$
$h(f(x)) = 1 + 4(5x + 1)$
$h(f(x)) = 1 + 20x + 4$
$h(f(x)) = 20x + 5$
$h(f(2)) = 20 \cdot 2 + 5 = 45$

Logo, $f(h(2)) + h(f(2)) = 46 + 45 = 91$

15. Do enunciado, obtém-se que $f(x) = \frac{1}{x - 1}$, $x \neq 1$ e $g(x) = 2x - 4$, portanto, para calcular $f(g(2)) + g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, deve-se:

$f(g(x)) = \frac{1}{2x - 4 - 1}$

$f(g(x)) = \frac{1}{2x - 5}$

$f(g(2)) = \frac{1}{2 \cdot 2 - 5} = -1$

$g(f(x)) = 2\left(\frac{1}{x - 1}\right) - 4$

$g(f(x)) = \frac{2}{x - 1} - 4$

$g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{2}{\frac{1}{2} - 1}\right) - 4$

$g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{2}{\frac{-1}{2}}\right) - 4$

$g\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = -4 - 4 = -8$

Logo:

$-1 - 8 = -9$

Resposta: alternativa **c**

16. Do enunciado, obtêm-se as funções $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) = 2x + 1$ e $g(f(x)) = 2x^2 + 2x + 1$. A função f é $x^2 + x$, visto que:

$g(f(x)) = 2(x^2 + x) + 1 = 2x^2 + 2x + 1$

Logo:

$f(7) = 49 + 7 = 56$

17. a] Do enunciado, obtém-se: $f(x) = x^3 - 1$. Para saber se ela é invertível, precisa-se fazer:

$f(x) = y$
$x^3 - 1 = y$
$x^3 = y + 1$
$x = \sqrt[3]{y + 1}$

Efetuando a troca de x por y, tem-se que:

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x + 1}$

b] Como $f: r \to r$, $f(x) = x^2$ não é injetora, pois $f(-1) = f(1) = 1$. Portanto, f não é invertível.

18. Do enunciado, obtém-se a função invertível $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = x^3$; para encontrar a f^{-1}, precisa-se fazer $f(x) = y$; então $y = x^3$. Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo $y = x^3$. Resolvendo a equação para a variável y, obtém-se: $y = \sqrt[3]{x}$. Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

19. a] Do enunciado, obtém-se que a função $f(x) = x - 3$ é bijetora, portanto, possui função inversa. Para calcular a função inversa, precisa-se fazer
$f(x) = y$, então $y = x - 3$. Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo $x = y - 3$. Resolvendo a equação para a variável y, obtém-se: $y = x + 3$. Logo, $f^{-1}(x) = x + 3$

b] Do enunciado, obtém-se que a função $g(x) = \frac{x+2}{4}$ é bijetora, portanto, possui função inversa. Para calcular a função inversa, precisa-se fazer $f(x) = y$, então, $y = \frac{x+2}{4}$. Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo $x = \frac{y+2}{4}$. Resolvendo a equação para a variável y, obtém-se:
$4x = y + 2 \Rightarrow y = 4x - 2$. Logo, $g^{-1}(x) = 4x - 2$

20. Do enunciado, obtém-se a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax - 2$ e a função g sendo a função inversa de f. Por hipótese, sabe-se que $f(-2) = 10$, portanto, para determinar a lei da função g, precisa-se fazer $f(-2) = 10$, utilizando-se os valores $x = -2$ e $f(-2) = y = 10$ para ser substituído na equação. Desta forma, obtém-se:
$f(x) = ax - 2 \Rightarrow f(-2) = a(-2) - 2 \Rightarrow 10 = -2a - 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow a = -6$
Logo, a função é expressa por:
$f(x) = -6x - 2$
Como $f(x) = y$, obtém-se: $y = -6x - 2$.
Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo-se $x = -6y - 2$. Resolvendo a equação para a variável y, obtém-se:
$-6y = x + 2 \Rightarrow y = \frac{-x-2}{6}$.
Logo:
$g(x) = \frac{-x-2}{6}$

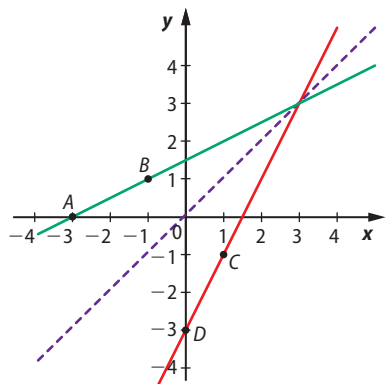
21. a] Do enunciado, obtém-se que f é invertível e dada por $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$, com $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.
Para determinar $f^{-1}(x)$, precisa-se fazer: $f(x) = y$, então $y = \frac{2x-1}{x-3}$.
Na função inversa, realiza-se a troca de x e y, obtendo-se $x = \frac{2y-1}{y-3}$.
Resolvendo a equação para a variável y, obtém-se:
$x(y - 3) = 2y - 1 \Rightarrow x(y - 3) = 2y - 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy - 2y = -1 + 3x \Rightarrow y(x - 2) = -1 + 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{3x-1}{x-2}$.
Logo, $f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2}$

b] O domínio de f^{-1} é o conjunto de números reais tais que o denominador de f^{-1} seja diferente de zero. Desse modo:
$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$
Portanto:
$D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

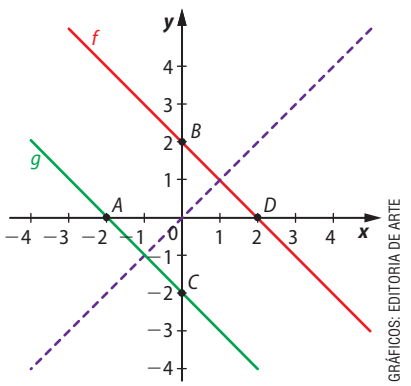
c] Para calcular $f^{-1}(-3)$, precisa-se substituir o valor de x na função por -3. Obtém-se então:
$f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{x-2} \Rightarrow f^{-1}(-3) = \frac{3(-3)-1}{(-3)-2} \Rightarrow f^{-1}(-3) = 2$

22. Do enunciado, obtém-se que $f(x) = \frac{x+1}{2x+a}$ tem uma função inversa dada por $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2x-1}$. Para calcular o valor de a, obtém-se que $f(x) = y$, então:
$y = \frac{x+1}{2x+a}$.
Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo-se $x = \frac{y+1}{2y+a}$. Resolvendo a equação para a variável y, obtém-se:
$x(2y + a) = y + 1 \Rightarrow 2xy + ax = y + 1 \Rightarrow 2xy - y = 1 - ax \Rightarrow$
$\Rightarrow y(2x - 1) = 1 - ax \Rightarrow y = \frac{1-ax}{2x-1}$.
Como a função inversa foi dada $f^{-1}(x) = \frac{1-3x}{2x-1}$, ao comparar os resultados encontrados, obtém-se que, para a função ter esse valor de inversa, o valor de a deve ser 3, pois:
$\frac{1-3x}{2x-1} = \frac{1-ax}{2x-1}$
Logo, $a = 3$.

23. a] O gráfico da função inversa f^{-1} é simétrico em relação à função f. Seu eixo de simetria é a reta $y = x$ (chamada também de bissetriz dos quadrantes ímpares). Neste caso, ao traçar a reta $y = x$, é possível observar os valores simétricos entre os gráficos, podendo-se afirmar que as duas funções são uma o inverso da outra.



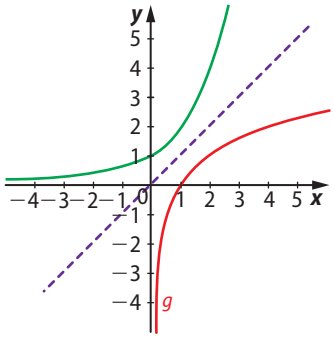
b] O gráfico da função inversa f^{-1} é simétrico em relação à função f. Seu eixo de simetria é a reta $y = x$ (chamada também de bissetriz dos quadrantes ímpares). Neste caso, ao traçar a reta $y = x$, observa-se que **não** há simetria entre as retas, portanto o gráfico não representa uma função inversa da outra.



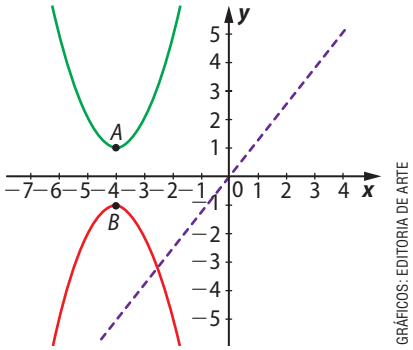
GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) O gráfico da função inversa f^{-1} é simétrico em relação à função f. Seu eixo de simetria é a reta $y = x$ (chamada também de bissetriz dos quadrantes ímpares). Neste caso, ao traçar a reta $y = x$, é possível observar os valores simétricos entre os gráficos, podendo afirmar que as duas funções são uma o inverso da outra.



d) O gráfico da função inversa f^{-1} é simétrico em relação à função f. Seu eixo de simetria é a reta $y = x$ (chamada também de bissetriz dos quadrantes ímpares). Neste caso, ao traçar a reta $y = x$, observa-se que não há simetria entre as retas, portanto, o gráfico não representa uma função inversa da outra.



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

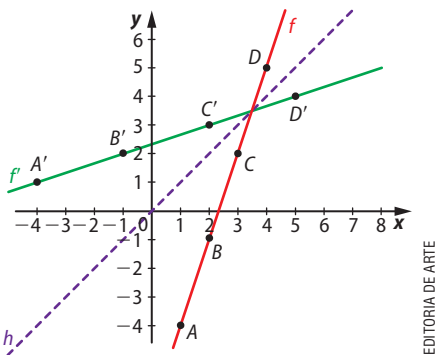
24. Para construir o gráfico da função inversa, marcam-se as coordenadas dos pares ordenados:

$A(1, -4)$; $B(2, -1)$; $C(3,2)$; $D(4,5)$

Como o par ordenado é da forma (x,y) e, na função inversa, invertem-se as variáveis x e y, podem-se encontrar os novos pares ordenados que darão origem à reta da função inversa invertendo-se os valores de x e y:

$A'(-4,1)$; $B'(-1,2)$; $C'(2,3)$; $D'(5,4)$

Com esses novos pontos, constrói-se o gráfico da função inversa.



EDITORIA DE ARTE

25. De acordo com a definição de módulo aplicado em cada item, obtêm-se:

a) $|3 - 5| = |-2| = 2$

b) $|-3 + 5| = |+2| = 2$

c) $|-3 - 5| = |-8| = 8$

d) $|-1| + |-6| = +1 + 6 = 7$

e) $|-|-5|| = |-5| = 5$

f) $|-2| - |-10| = 2 - 10 = -8$

26. a) A distância entre A e B é: $d_{AB} = |-4 - (-1)| = |-3| = 3$.

b) A distância entre B e C é: $d_{BC} = |-1 - (0)| = |-1| = 1$.

c) A distância entre B e D é: $d_{BD} = |-1 - (5)| = |-6| = 6$.

d) A distância entre A e D é: $d_{AD} = |-4 - (5)| = |-9| = 9$.

27. Ao aplicar a definição de módulo para determinar o valor numérico da expressão em cada item, obtém-se:

a) Para $x = -4$,

$2x - |x| = 2(-4) - |-4| = 8 - 4 = -12$

b) Para $x = -1$,

$$\frac{|4x+1|}{|5-2x|} = \frac{|4\cdot(-1)+1|}{|5-2\cdot(-1)|} = \frac{|-4+1|}{|5+2|} = \frac{|-3|}{|7|} = \frac{3}{7}$$

c) Para $x = -2$,

$|x^3 + x| - |x^2 - 3x + 1| =$

$= |(-2)^3 + (-2)| - |(-2)^2 - 3 \cdot (-2) + 1| =$

$= |-8 - 2| - |4 + 6 + 1| = |-10| - |11| = 10 - 11 = -1$

28. Do enunciado, obtém-se que: $A = |x| + |x + 2|$, então, para simplificar essa expressão, precisa-se utilizar a definição de módulo, tal que:

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ se } x < 0 \\ x \text{ se } x \geqslant 0 \end{cases} \text{ e } |x+2| = \begin{cases} -(x+2) \text{ se } x < -2 \\ x+2 \text{ se } x \geqslant -2 \end{cases}$$

a) Então para $x < -2$ obtém-se que $A = -x - (x + 2) = -2x - 2$

b) Então para o intervalo $-2 \leqslant x < 0$ obtém-se que $A = -x + (x + 2) = 2$

c) Então para $x \geqslant 0$ obtém-se que $A = x + (x + 2) = 2x + 2$

29. Para calcularmos a expressão $|x + 3| + |2x - 1|$, sem os módulos, é preciso analisar o que acontece quando $x > 3$. Se isso ocorrer, obtém-se:

$$\begin{cases} |x+3| = x+3 \\ |2x-1| = 2x-1 \end{cases} \Rightarrow (x + 3) + (2x - 1) = 3x + 2$$

30. a) Para calcular o conjunto de valores da expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$, com a, b e c positivos, utilizando a definição de módulo, basta fazer $\frac{a}{a} + \frac{b}{b} + \frac{c}{c} = 1 + 1 + 1 = 3$

b) Para calcular o conjunto de valores da expressão $\frac{a}{|a|} + \frac{b}{|b|} + \frac{c}{|c|}$, com a, b e c negativos, utilizando a definição de módulo, basta fazer $\frac{a}{-a} + \frac{b}{-b} + \frac{c}{-c} = -1 + (-1) + (-1) = -3$

31. a) Do enunciado, obtém-se que $f(x) = \frac{2}{|x-3|}$. Para identificarmos o ponto em que a função não esteja definida,

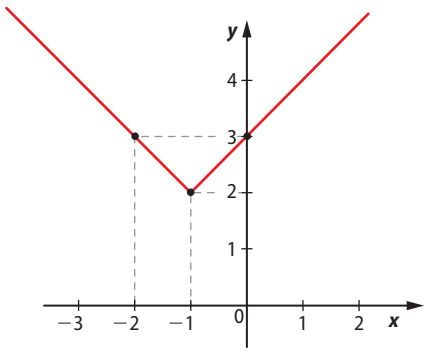
MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

precisa-se analisar o domínio, ou seja, $|x - 3| \neq 0$, portanto, para $x = 3$ o denominador se anula.

b) Do enunciado, obtém-se que $f(x) = \frac{2}{|x-3|}$. Então:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\left|\frac{1}{2} - 3\right|} = \frac{2}{\left|-\frac{5}{2}\right|} = \frac{2}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}$$

32. O objetivo é determinar a lei dessa função definida por este gráfico:

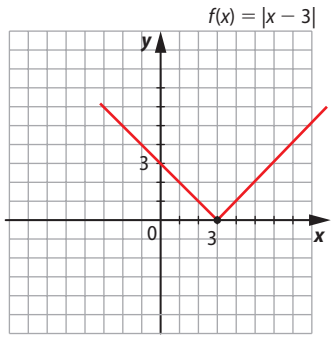


Pode-se, perceber que se trata de uma função modular, portanto é necessário analisar os pontos em que ela é positiva e os pontos em que ela é negativa, de tal forma que:

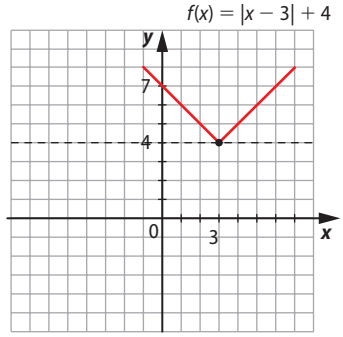
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x + 1 \text{ se } x < -1 \\ f(x) = x + 3 \text{ se } x > -1 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = |x + 1| + 2$$

Portanto, a imagem da função f é dada por $\text{Im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$, e o seu domínio é dado por $D(f) = \mathbb{R}$.

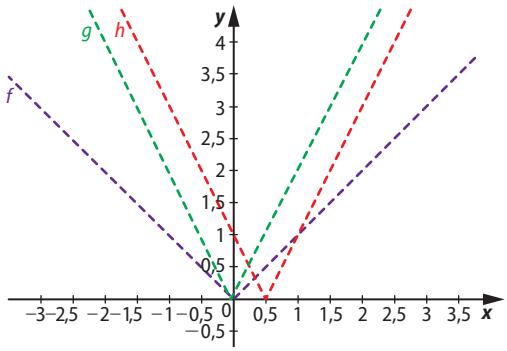
33. a) Para determinar o gráfico de $f(x) = |x - 3|$, deve-se analisar quando $x \geqslant 0$ e quando $x \leqslant 0$, portanto, o gráfico de $f(x) = |x|$ sofrerá uma transformação em sua lei de formação. Ao representar o gráfico de $f(x) = |x - 3|$, o gráfico original da função modular sofrerá uma translação horizontal em 3 unidades para a direita. Dessa forma, o vértice da função sairá da origem (0, 0) e deverá ser realocado em (3, 0), e o ponto de intersecção com o eixo y será (0, 3).



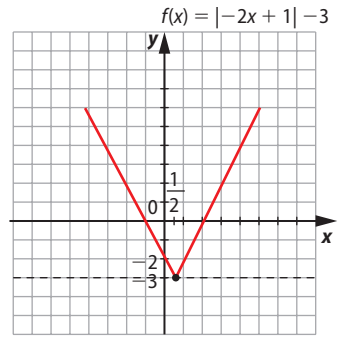
b) Para determinar o gráfico de $g(x) = |x - 3| + 4$, deve-se analisar quando $x \geqslant 0$ e quando $x < 0$, portanto, usa-se a mesma construção utilizada no item **a**, porém será obtida uma segunda translação vertical para cima em 4 unidades. Com isso, o gráfico terá seu vértice posicionado sob o ponto (3, 4), e o ponto de intersecção com o eixo y será (0, 7).



c) Para determinar o gráfico de $h(x) = |-2x + 1|$, é necessário analisar quando $x \geqslant 0$ e quando $x < 0$, portanto, usa-se como base o gráfico da função modular $f(x) = |x|$. O gráfico em linhas pontilhadas roxas representa a função modular, já o gráfico em verde representa a multiplicação da função por uma constante, no caso -2, então $f(x) = |-2x|$. Por último, há uma translação horizontal em 1 unidade para a direita. Dessa forma, o gráfico terá seu vértice no ponto (0,5; 0) e ponto de intersecção com o eixo y em (0, 1).



d) Para determinar o gráfico de $j(x) = |-2x + 1| - 3$, é necessário analisar quando $x \geqslant 0$ e quando $x < 0$, portanto, usa-se como base o gráfico do item **c**, porém representa-se pela translação vertical em 3 unidades para baixo. Dessa forma, o gráfico terá seu vértice em $(0,5; -3)$ e a intersecção com o eixo y em $(0, -2)$.

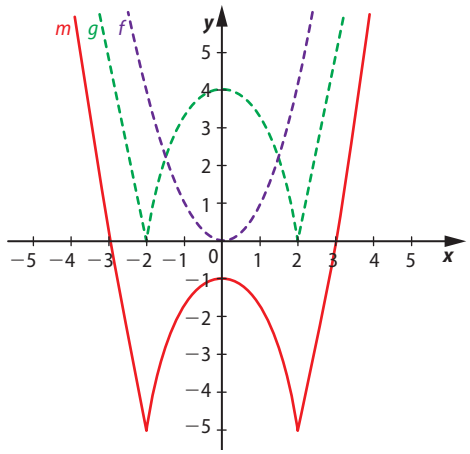


GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

e) Para determinar o gráfico de $m(x) = |x^2 - 4| - 5$, é necessário analisar quando $x \geqslant 0$ e quando $x < 0$, portanto, o gráfico em pontilhado roxo representa a função $f(x) = |x^2|$. Ao subtrair 4 da função inicial,

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

obtém-se o tracejado verde, com a representação do módulo indicando a parte da função que não terá valores negativos $f(x) = |x^2 - 4|$. Por último, a operação que está fora do módulo e representará uma translação vertical em 5 unidades para baixo. Dessa forma, os pontos de mínimo serão $(-2, -5)$ e $(2, -5)$, e o vértice estará em $(0, -1)$.



34. Do enunciado obtém-se que $P(n) = 8 - |6 - n|$, em que P representa o preço médio em reais e n é o número correspondente ao mês do ano. Para encontrar o valor de n para que $P(n)$ seja mínimo, precisa-se fazer:

$P(n) = 8 - |6 - n|$, com $n > \{1, 2, 3, ..., 11, 12\}$

Para $n \leqslant 6$

$P(n) = 2 + n$ (função crescente)

$P(n)$ tem valor mínimo para $n = 1$

$P(1) = 3$

Para $n > 6$

$P(n) = 14 - n$ (função decrescente)

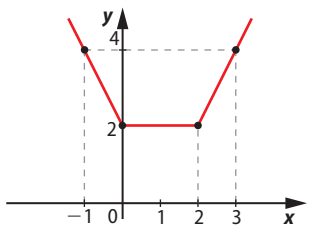
$P(n)$ tem valor mínimo para $n = 12$

$P(12) = 2$

Logo, o valor mínimo absoluto de $P(n)$ acontece para $n = 12$.

35. **a)** Para construir o gráfico da função $f(x) = |x| + |x - 2|$, precisa-se separá-la por partes de acordo com a definição de função modular, dessa forma, obtém-se:

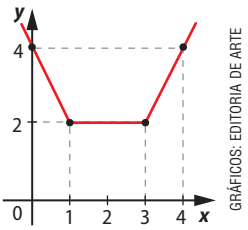
$$f(x) = \begin{cases} -2x + 2 \text{ se } x < 0 \\ 2 \text{ se } 0 \leqslant x < 2 \\ 2x - 2 \text{ se } x \geqslant 2 \end{cases}$$



No qual o domínio da função é $D(f) = \mathbb{R}$ e a imagem da função seja $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

b) Para construir o gráfico da função $g(x) = |x - 1| + |x - 3|$, precisa-se separá-la por partes de acordo com a definição de função modular, dessa forma, obtém-se:

$$g(x) = \begin{cases} -2x + 4, \text{ se } x < 1 \\ 2, \text{ se } 1 \leqslant x < 3 \\ 2x - 4, \text{ se } x \geqslant 3 \end{cases}$$



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

No qual o domínio da função é $D(g) = \mathbb{R}$ e a imagem da função seja $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geqslant 2\}$

36. Para resolver as equações modulares abaixo, é necessário usar a definição de equação modular, a qual diz que primeiro se calcula para o valor positivo e depois para o valor negativo.

a) Valor positivo: $3x + 1 = 6 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

Valor negativo: $3x + 1 = -6 \Rightarrow x = -\frac{7}{3}$

$S = \left\{-\frac{7}{3}, \frac{5}{3}\right\}$

b) Valor positivo: $\frac{x-2}{3} = 1 \Rightarrow x = 5$

Valor negativo: $\frac{x-2}{3} = -1 \Rightarrow x = -1$

$S = \{-1, 5\}$

c) Seguindo o mesmo modelo dos itens **a** e **b**, obtém-se:

Valor positivo: $x^2 + 4x = 12$, então:

$x^2 + 4x - 12 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = -6$ e $x'' = 2$.

Valor negativo: $x^2 + 4x = -12$, então:

$x^2 + 4x + 12 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, não se obtêm raízes, pois $\Delta = 16 - 48 = -32$ e, por isso, não possui raiz real.

$S = \{-6, 2\}$

37. **a)** Para determinar o quilômetro da rodovia em que está localizado o posto, deve-se calcular $d(x) = 0$, pois é o ponto em que a distância até o posto é nula. Assim:

$d(x) = 0 \Rightarrow |x - 200| = 0 \Rightarrow x - 200 = 0 \Rightarrow x = 200$

Portanto, o posto está localizado no km 200 da rodovia.

b) Do enunciado, $d(x) = 135$, então:

$$|x - 200| = 135 \rightarrow \begin{cases} x - 200 = 135 & \text{(I)} \\ x - 200 = -135 & \text{(II)} \end{cases}$$

Da equação **I**, obtém-se:

$x - 200 = 135$

$x = 335$

Da equação **II**, obtém-se:

$x - 200 = -135$

$x = 65$

A pessoa pode estar no km 65 ou no km 335 da rodovia.

38. Considerando $x > 0$, obtém-se: $x = x - 6 \Rightarrow 0 = 6$ (absurdo). Ao considerar $x < 0$, obtém-se:

$x = -x + 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$, porém, se $x = 3$, x será menor do que zero, o que também não pode ocorrer. Portanto, a equação não tem solução.

Resposta: alternativa **d**

39. Para calcular a intersecção do conjunto $S_1 \cap S_2$, precisa-se calcular primeiro a condição de existência de (i), então:

$1 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant \frac{1}{2}$

Em seguida, calcula-se o valor de x, da equação modular:

$|x - 5| = 1 - 2x$

Valor positivo: $x - 5 = 1 - 2x \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 2$ (não convém, pois não satisfaz a condição de existência)

Valor negativo: $x - 5 = 2x - 1 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$

$S_1 = \{-4\}$

Agora, precisa-se calcular a condição de existência de (ii), então:

$6 - 2x \geqslant 0 \Rightarrow x \leqslant 3$

Em seguida, calcula-se o valor de x da equação modular:

$|2x - 6| = 6 - 2x$

Valor positivo: $2x - 6 = 6 - 2x \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3$

Valor negativo: $2x - 6 = 2x - 6 \Rightarrow 0x = 0$

$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 3\}$

Portanto, $S_1 \cap S_2 = \{-4\}$

Resposta: alternativa **d**

40. Do enunciado, obtém-se: $x^2 - 5x + 6 = |x - 3|$. Para calcular a soma das raízes, primeiro precisa-se encontrar a condição de existência dessa equação e, em seguida, resolver a equação do 2º grau para obter os valores de x.

Condição de existência:

$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$

Resolvendo a inequação, obtêm-se as raízes $x' = 2$ e $x'' = 3$. Portanto, o intervalo positivo da função são todos os números menores do que 2 ou maiores do que 3.

Resolvendo a equação modular, obtêm-se:

(I) $x^2 - 5x + 6 = x - 3 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow x = 3$

(II) $x^2 - 5x + 6 = -x + 3 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1$ ou $x = 3$

As respostas satisfazem a condição de existência, pois são todos valores maiores ou iguais a zero. Observe:

$x^2 - 5x + 6 \geqslant 0$

Para $x = 3 \Rightarrow (3)^2 - 5 \cdot (3) + 6 \geqslant 0 \Rightarrow 0 \geqslant 0$ (V)

Para $x = 1 \Rightarrow (1)^2 - 5 \cdot (1) + 6 \geqslant 0 \Rightarrow 2 \geqslant 0$ (V)

Logo, $3 + 1 = 4$.

Resposta: alternativa **e**

41. Do enunciado, obtém-se: $|x^2 - 3x + 2| = |2x - 3|$.

Para encontrar o produto das raízes, precisa-se primeiro encontrar as raízes:

$x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow (x - 1) \cdot (x - 2) = 0$, logo as raízes são 1 e 2.

$2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, que é a raiz.

Com isso, obtêm-se 4 intervalos a serem estudados.

1º) $x \leqslant 1$, portanto, precisa-se fazer:

$x^2 - 3x + 2 = -(2x - 3)$

$x^2 - x - 1 = 0$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \overbrace{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^{\text{não convém}}$ e $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

2º) $1 < x < \frac{3}{2}$, portanto, precisa-se fazer:

$-(x^2 - 3x + 2) = -(2x - 3)$

$-x^2 + 5x - 5 = 0$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5}}{-2} \Rightarrow x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \overbrace{\frac{-5+\sqrt{5}}{2}}^{\text{não convém}}$

3º) $\frac{3}{2} \leqslant x < 2$, portanto, precisa-se fazer:

$-(x^2 - 3x + 2) = 2x - 3$

$-x^2 + x + 1 = 0$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{-2} \Rightarrow x_1 = \overbrace{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}^{\text{não convém}}$ e $x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4º) $x \geqslant 2$, portanto, precisa-se fazer:

$x^2 - 3x + 2 = 2x - 3$

$x^2 - 5x + 5 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$ e $x_2 = \overbrace{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}^{\text{não convém}}$

Então, o produto das raízes é:

$$\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) =$$

$$= \left(\frac{1-5}{4}\right) \cdot \left(\frac{25-5}{5}\right) = (-1) \cdot 5 = -5$$

Resposta: alternativa **a**

42. Do enunciado obtém-se: $|x^2 - 8| - 4 = 0$. Para calcular o produto das raízes, precisa-se encontrar as raízes. Para isso, precisa-se calcular a equação modular para os valores positivos e para os valores negativos:

$|x^2 - 8| - 4 = 0 \Rightarrow |x^2 - 8| = 4$

Valores positivos: $x^2 - 8 = 4$

Se $x^2 - 8 = 4 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{3}$

Valores negativos: $x^2 - 8 = -4$

Se $x^2 - 8 = -4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

Portanto, o produto das raízes é:

$P = 2\sqrt{3} \cdot \left(-2\sqrt{3}\right) \cdot (2) \cdot (-2) = 48$

Resposta: alternativa **e**

43. Para calcular o valor de $|f(x)| = 1$, precisa-se considerar que $f(x) = 1$ ou $f(x) = -1$

Observando o gráfico $f(x)$, verifica-se que $f(x) = 1$ em 3 pontos e $f(x) = -1$ em 2 pontos.

Portanto, a equação $|f(x)| = 1$ tem 5 elementos em seu conjunto solução.

Resposta: alternativa **b**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

44. Ao analisar o gráfico, podem-se definir as funções:
$f(x) = |x - 1| - 2$ e $g(x) = \frac{x}{2} + 2$.
Depois, é preciso analisar cada uma das sentenças:
- Primeira sentença
$f(-1) = |-1 - 1| - 2 = |-2| - 2 = 0$
$g(-2) = \frac{-2}{2} + 2 = -1 + 2 = 1$
$g(f(-1)) - f(g(-2) + 2) = g(0) - f(1 + 2) =$
$= \left(\frac{0}{2} + 2\right) - (|3 - 1| - 2) = 2 - 0 = 2$ (Verdadeira)
- Segunda sentença
$g(-4) = \frac{-4}{2} + 2 = 0$
$f(g(-4) + 1) + 3 = f(0 + 1) + 3 = f(1) + 3 =$
$= |1 - 1| - 2 + 3 = 1$ (Verdadeira)
- Terceira sentença
Ao observar o gráfico, pode-se concluir que a $f(x) = |x - 1| - 2$ (Verdadeira)

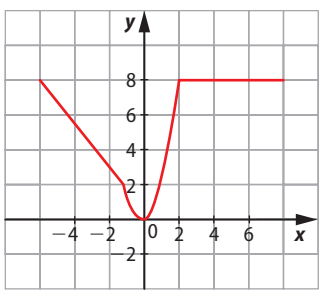
Logo, as 3 afirmações são verdadeiras.
Resposta: alternativa **b**

45. Do enunciado, obtém-se:
$\left|f(x) - 6\right| = 8 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x^2 - 2 - 6\right| = 8 \Rightarrow \left|\frac{1}{2}x^2 - 8\right| = 8$
Resolvendo a equação modular para os valores positivos e negativos, obtêm-se as seguintes raízes:
$\frac{1}{2}x^2 - 8 = -8 \Rightarrow x = 0$
$\frac{1}{2}x^2 - 8 = 8 \Rightarrow x = 4\sqrt{2}$ ou $x = -4\sqrt{2}$
Portanto, as raízes irracionais são $4\sqrt{2}$ e $-4\sqrt{2}$.
Resposta: alternativa **c**

Atividades complementares

1. Do enunciado obtém-se a função $f(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \leq -1 \\ 2x^2, \text{ se } -1 < x \leq 2 \\ 8, \text{ se } x > 2 \end{cases}$
Então, sabe-se que:
- Se $x \leq -1$, então $f(x)$ é uma reta decrescente e $f(-1) = 2$.
- Se $-1 < x \leq 2$, então $f(x)$ é uma parábola de concavidade para cima que passa pela origem e $f(2) = 8$.
- Se $x > 2$, então $f(x)$ é uma reta constante de valor 8.

Dessa forma, o gráfico que melhor se encaixa nessas condições é:



EDITORIA DE ARTE

Resposta: alternativa **a**

2. Do enunciado obtém-se: $f(2x + 1) = 2x + 4$ e $g(x + 1) = 2x - 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Para calcular $f \circ g(x)$, precisa-se primeiro determinar $f(x)$, logo:
$f(2x + 1) = 2x + 4$
$f(2x + 1) = (2x + 1) + 3$
Logo, pode-se observar que $f(x) = x + 3$
De forma análoga, determina-se a função $g(x)$:
$g(x + 1) = 2x - 1$
$g(x + 1) = 2x + 2 - 3$
$g(x + 1) = 2(x + 1) - 3$
Logo, pode-se observar que $g(x) = 2x - 3$
Ao fazer a função composta $f(g(x))$, obtém-se:
$f(g(x)) = f(2x - 3)$
$f(g(x)) = (2x - 3) + 3$
$f(g(x)) = 2x$
Portanto, a função $f \circ g(x) = 2x$
Resposta: alternativa **d**

3. Do enunciado, obtém-se que $f : [0, +\infty[\to [4, +\infty[$, definida por $f(x) = (x + 2)^2$ e domínio da função inversa f^{-1}: $[4, +\infty[\to [0, +\infty[$, para calcular a função inversa, precisa-se fazer: $f(x) = y$, então:
$y = (x + 2)^2$
Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo:
$x = (y + 2)^2$
Resolvendo a equação para a variável y:
$\sqrt{x} = (y + 2) \Rightarrow y = \sqrt{x} - 2$. Logo, $f^{-1}(x) = \sqrt{x} - 2$
Resposta: alternativa **d**

4. Do enunciado, obtém-se: $f(x) = \frac{3x + 2}{x - 1}$, $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.
Para encontrar o domínio de f^{-1}, precisa-se calcular a f^{-1} e depois analisar o domínio. Portanto, como $f(x) = y$, obtém-se:
$y = \frac{3x + 2}{x - 1}$
Na função inversa, realiza-se a troca de x e y obtendo $x = \frac{3y + 2}{y - 1}$. Resolvendo a equação para a variável y:
$x(y - 1) = 3y + 2 \Rightarrow xy - x = 3y + 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow xy - 3y = 2 + x \Rightarrow y(x - 3) = 2 + x \Rightarrow$
$\Rightarrow y = \frac{2 + x}{x - 3}$
Logo, $f^{-1}(x) = \frac{(2 + x)}{x - 3}$
O domínio da função é o conjunto de valores em que ela é definida. Dessa forma, como se obtém uma fração algébrica, o denominador dessa fração deve ser diferente de zero.
$x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$
Portanto, o conjunto domínio será dado por $D(f^{-1}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\}$ ou $\mathbb{R} - \{3\}$.
Resposta: alternativa **b**

5. Do enunciado, obtém-se: $f : [-5, 3] \to A \subset \mathbb{R}$, tal que f é definida por $f(x) = |x + 2| - 3$. Para calcular o conjunto A, ou seja, o conjunto imagem, é necessário lembrar que uma função é sobrejetora quando possui a sua imagem igual ao seu contradomínio. Dessa forma, podem-se

encontrar os valores da imagem dessa função atribuindo os valores dados pelo seu domínio, que foi definido pelo intervalo fechado $[-5, 3]$.

$D(f)$	$\text{Im}(f)$
-5	$\lvert -5+2\rvert -3 = 0$
-4	$\lvert -4+2\rvert -3 = -1$
-3	$\lvert -3+2\rvert -3 = -2$
-2	$\lvert -2+2\rvert -3 = -3$
-1	$\lvert -1+2\rvert -3 = -2$
0	$\lvert 0+2\rvert -3 = -1$
1	$\lvert 1+2\rvert -3 = 0$
2	$\lvert 2+2\rvert -3 = 1$
3	$\lvert 3+2\rvert -3 = 2$

Dos valores encontrados no conjunto imagem, pode-se escrever o conjunto como $[-3, 2]$. Dessa forma, para que a função seja sobrejetora, o seu contradomínio, ou o conjunto A, deve ser $[-3, 2]$.

Resposta: alternativa **d**

6. Do enunciado obtém-se que: $f(x) = |x - 200| \cdot 50$, em que x representa cada dia do ano. Se o lucro pretendido é R$ 5.750,00, então:

$5\,750 = |x - 200| \cdot 50 \Rightarrow |x - 200| = 115$, assim:

$$\begin{cases} x - 200 = 115, \text{ se } x \geqslant 0 \quad \text{(I)} \\ -x + 200 = 115, \text{ se } x < 0 \quad \text{(II)} \end{cases}$$

De (I) obtém-se:

$x - 200 = 115 \Rightarrow x = 315$ (equivalente a novembro)

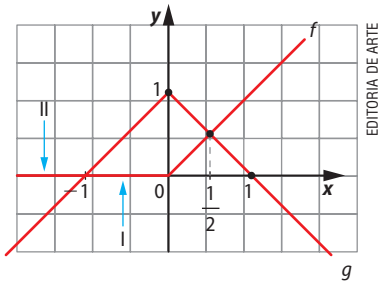
De (II) obtém-se:

$-x + 200 = 115 \Rightarrow x = 85$ (equivalente a março)

Esse lucro será possível nos meses de março e novembro.

Resposta: alternativa **c**

7. Do enunciado, obtêm-se $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$ e $g(x) = -|x| + 1$ e a imagem abaixo.



EDITORIA DE ARTE

Tal que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x + x}{2} = x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ \dfrac{x - x}{2} = 0, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} -x + 1, \text{ se } x \geqslant 0 \\ x + 1, \text{ se } x < 0 \end{cases}$$

Será necessário analisar cada afirmativa, logo:

I) é falsa, pois, para $-1 < x < 0$, $g(x) > f(x)$;

II) é falsa, pois, para $x \leqslant -1$, $f(x) \geqslant g(x)$;

III) é falsa, pois as raízes da equação $f(x) = g(x)$ são $x_1 = -1$ e $x_2 = \dfrac{1}{2}$ e a soma das raízes:

$$x_1 + x_2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, a alternativa correta é o item **a**, em que todas as afirmativas são falsas.

Resposta: alternativa **a**

8. Para verificar qual das alternativas é falsa, será necessário analisar uma a uma.

a) Verdadeira, a relação vale para qualquer número real.

b) Verdadeira, a relação vale para qualquer número real.

c) Verdadeira, a relação vale para qualquer número real.

d) Verdadeira, pois $x = \pm\sqrt{y}$, mas, se $x < 0$, então: $x = -\sqrt{y}$

e) Falsa, pois $|x + y| < |x| + |y|$

Resposta: alternativa **e**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Atividades

1. Aplicando a definição e propriedade da exponenciação:

a) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 3} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$

b) $(-1{,}2)^2 = (-1{,}2)\cdot(-1{,}2) = 1{,}44$

c) $(-0{,}1)^2 = (-0{,}1)\cdot(-0{,}1) = 0{,}01$

d) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4 = \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{16}{81}$

2. Aplicando a propriedade de potência com expoente racional e, em seguida, utilizando uma calculadora:

a) $5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$

Utilizando uma calculadora obtém-se a aproximação 3,344.

b) $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10}$

Utilizando uma calculadora obtém-se a aproximação 3,162.

c) $2^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{2}$

Utilizando uma calculadora obtém-se a aproximação 1,260.

d) $3^{0{,}25} = 3^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{3}$

Utilizando uma calculadora obtém-se a aproximação 1,316.

e) $\pi^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\pi}$

Utilizando uma calculadora obtém-se a aproximação 1,331

f) $3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3^{-1}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$

Utilizando uma calculadora obtém-se a aproximação 0,577

3. a) Aplicando a primeira propriedade da potenciação: $3^{4+5} = 3^9$

b) Aplicando a terceira propriedade da potenciação: $x^{3\cdot 4} = x^{12}$

c) Aplicando a primeira propriedade da potenciação: $7^{9+4} = 7^{13}$

d) Aplicando a segunda propriedade da potenciação: $10^{12-5} = 10^7$

e) Aplicando a terceira propriedade da potenciação: $10^{3\cdot 2} = 10^6$

f) Aplicando a primeira propriedade da potenciação: $a^{n+1\cdot n-2} = a^{2n-1}$

4. Aplicando a propriedade de potência com expoente inteiro:

a) $\frac{1}{3^2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 3^{-2}$

b) $\frac{1}{10^4} = \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 10^{-4}$

c) $\frac{1}{2^5} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^{-5}$

d) $\frac{1}{6^2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 6^{-2}$

e) $\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^1 = 2^{-1}$

f) $\frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 = a^{-2}$

5. a) $5^{1{,}5} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3} = \sqrt{125} \simeq 11{,}180$

b) $12^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{12} \simeq 1{,}861$

c) $28^{0{,}25} = \sqrt[4]{28} \simeq 2{,}300$

d) $3^{4{,}5} = 3^{\frac{9}{2}} = \sqrt{3^9} = \sqrt{19\,683} \simeq 140{,}296$

e) $2^{2{,}6} \simeq 6{,}063$

f) $\left(\frac{5}{3}\right)^{1{,}25} = \left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^5} = \frac{\sqrt[4]{3\,125}}{\sqrt{243}} \simeq 1{,}894$

g) $3^{\sqrt{5}} \simeq 11{,}665$

h) $10^{\sqrt{3}} \simeq 53{,}957$

6. Como em cada item a seguir há um produto ou uma razão entre notações científicas, podem-se reorganizar os fatores de cada notação de acordo com a operação indicada no respectivo item.

a) $(2{,}0\cdot 10^3)\cdot(4{,}0\cdot 10^{-5}) = 2{,}0\cdot 4{,}0\cdot 10^3\cdot 10^{-5} =$
$= (2{,}0\cdot 4{,}0)\cdot 10^{3-5} = 8\cdot 10^{-2}$

b) $(5{,}2\cdot 10^6) : (1{,}3\cdot 10^{-3}) = (5{,}2 : 1{,}3)\cdot(10^{6-(-3)}) = 4\cdot 10^9$

c) $(1{,}5\cdot 10^3)\cdot(2{,}0\cdot 10^{-5})\cdot(4{,}0\cdot 10^{-8}) =$
$= (1{,}5\cdot 2{,}0\cdot 4{,}0)\cdot(10^{3-5-8}) = 12\cdot 10^{-10} = 1{,}2\cdot 10^{-9}$

7. a) Desenvolvendo as potências em cada item:

$a = 3^3 = 27$

$b = (-2)^3 = -8$

$c = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

$d = (-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = -\frac{1}{8}$

b) A sequência dos números a, b, c e d escritos na ordem crescente é: $-8; -\frac{1}{8}; \frac{1}{9}; 27$

8. Para calcular a metade de 2^{2012}, deve-se dividir o número por dois, logo:

$\frac{2^{2012}}{2} = 2^{2012-1} = 2^{2011}$

9. Aplicando as propriedades da potenciação:

$4^{x+2-x+2} : 4^{x-x+1} = \frac{4^{x+2-x+2}}{4^{x-x+1}} = \frac{4^4}{4} = 4^3 = 64$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

10. Observando a expressão $\frac{3^{12}-3^{11}-3^{10}}{3^{11}+3^{10}+3^{10}}$, pode-se colocar 3^{10} em evidência no numerador e denominador. Logo:

$$\frac{3^{10}(3^2-3-1)}{3^{10}(3+1+1)}=\frac{3^2-3-1}{3+1+1}=\frac{5}{5}=1$$

11. Para encontrar um valor de n para que $A = 12^n$ seja o maior número natural possível, devem-se, primeiro, analisar os valores para n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 e 8. Portanto:

$12^1 = 12$
$12^2 = 144$
$12^3 = 1\,728$
$12^4 = 20\,736$
$12^5 = 248\,832$
$12^6 = 2\,985\,984$
$12^7 = 35\,831\,808$
$12^8 = 429\,981\,696$

Observe que, para o algarismo da unidade ser 6, a potência é 4 ou 8. Portanto, para o final ser 6, deve-se ter um expoente múltiplo de 4. Assim, dentro do intervalo $78 \leqslant n \leqslant 155$, deve-se encontrar o maior múltiplo de 4. Como o resto da divisão de 155 por 4 é 3, então o maior múltiplo de 4 será 152. Portanto, $n = 152$.

12. Para simplificar cada expressão devem-se aplicar as propriedades da potenciação.

a) $(27\cdot 8)^{-\frac{1}{3}}=\left(3^3\cdot 2^3\right)^{-\frac{1}{3}}=(6)^{3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)}=6^{-1}=\frac{1}{6}$

b) $81^{\frac{7}{4}}\cdot 81^{-\frac{1}{2}}=81^{\frac{7}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(3^4\right)^{\frac{5}{4}}=3^5$

c) $\left(8^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\left(2^3\right)^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(2^4\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{-2}=\frac{1}{4}$

d) $\frac{7^{4,3}\cdot 7^{-2,6}}{7^{-0,3}}=7^{(4,3-2,6)-(-0,3)}=7^2$

e) $\left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(\frac{64}{125}\right)^{-\frac{1}{3}}=\left(5^{-4}\right)^{-\frac{1}{4}}\cdot\left(4^3\cdot 5^{-3}\right)^{-\frac{1}{3}}=$
$=5\cdot\left(4^{-1}\cdot 5\right)=5^2\cdot 2^{-2}=\left(\frac{5}{2}\right)^2$

13. Nas passagens 1 e 2, as propriedades de potenciação foram aplicadas corretamente. Porém, na passagem 3 há um erro com relação ao sinal, pois o sinal negativo (operação) não foi distribuído entre os termos do subtraendo. Corrigindo:

$5^{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1}=5^2=25$

Portanto, a resposta correta é 25.

14. Chamando o resultado da expressão de A e usando as propriedades das potências:

$$A=\sqrt[3]{\frac{6\cdot 10^4\cdot 9\cdot 10^{-5}}{2\cdot 10^{-4}}}\Rightarrow A=\sqrt[3]{3^3\cdot 10^3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A=3\cdot 10\Rightarrow A=30$$

15. Aplicando as propriedades da potenciação:

$$\frac{(0,1)^{-1}-(0,8)^0}{\frac{8}{3}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^3\cdot(-3)}=\frac{10-1}{\frac{8}{3}\cdot\frac{27}{8}\cdot(-3)}=-\frac{9}{27}=-\frac{1}{3}$$

16. Aplicando as propriedades nas informações fornecidas no enunciado:

$xyz = (2^2)^3\cdot 2^{2^3}\cdot 2^{3^2} = 2^6\cdot 2^8\cdot 2^9 = 2^{23}$

17. Fatorando os termos da expressão e aplicando as propriedades das potências:

$$\frac{10^{10}+10^{20}+10^{30}}{10^{20}+10^{30}+10^{40}}=\frac{10^{10}+10^{10}\cdot 10^{10}+10^{10}\cdot 10^{20}}{10^{20}+10^{20}\cdot 10^{10}+10^{20}\cdot 10^{20}}=$$
$$=\frac{10^{10}\cdot\cancel{\left(1+10^{10}+10^{20}\right)}}{10^{20}\cdot\cancel{\left(1+10^{10}+10^{20}\right)}}=\frac{10^{10}}{10^{20}}=10^{10-20}=10^{-10}$$

18. Fatorando os termos da expressão e aplicando as propriedades da potenciação:

$$\frac{\left(2^{n-1}+2^n+2^{n+1}\right)\left(3^{n-1}+3^n+3^{n+1}\right)}{6^n+6^{n+1}}=$$
$$=\frac{2^{n'}\left(2^{-1}+1+2\right)3^{n'}\left(3^{-1}+1+3\right)}{6^{n'}(1+6)}=$$
$$=\frac{\left(\frac{1}{2}+3\right)\left(\frac{1}{3}+4\right)}{7}=\frac{\frac{7}{2}\cdot\frac{13}{3}}{7}=\frac{13}{6}$$

19. Para avaliar se uma função é crescente ou decrescente, deve-se avaliar o coeficiente a. Logo:

a) $f(x) = 5^x \Rightarrow$ função crescente, pois $a > 1$.

b) $f(x)=\left(\frac{1}{6}\right)^x \Rightarrow$ função decrescente, pois $0 < a < 1$.

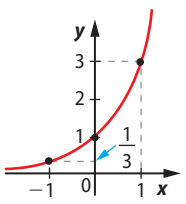
c) $f(x)=2^{-x}=\left(2^{-1}\right)^x=\left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow$ função decrescente, pois $0 < a < 1$.

d) $f(x)=3^{\frac{x}{2}}=\left(\sqrt{3}\right)^x \Rightarrow$ função crescente, pois $a > 1$.

20. a) $f(x) = 3^x$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

x	$f(x) = 3^x$
-1	$\frac{1}{3}$
0	1
1	3

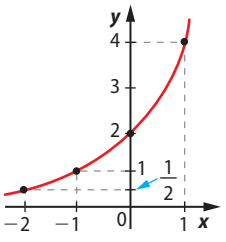


Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

b) $f(x) = 2^{x+1}$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

x	$f(x) = 2^{x+1}$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
0	2
1	4



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

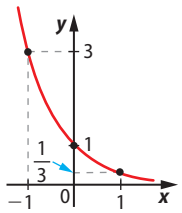
Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

x	$f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$
-1	3
0	1
1	$\frac{1}{3}$

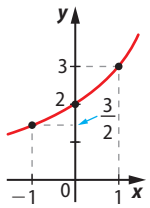


Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$

d) $f(x) = 2^x + 1$

Considerando alguns pontos para x e substituindo na lei da função:

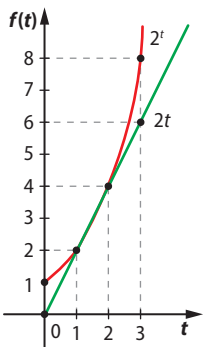
x	$f(x) = 2^x + 1$
-1	$\frac{3}{2}$
0	2
1	3



Portanto, o domínio é $D(f) = \mathbb{R}$ e a $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 1\}$

21. a) Considerando alguns valores para x e substituindo em ambas as funções, obtêm-se o quadro e gráficos a seguir.

t	$2t$	2^t
0	0	1
1	2	2
2	4	4
3	6	8



b) Sim, ao observar os gráficos é possível perceber que eles se interceptam em $t = 1$ e $t = 2$, com t em hora.

c) Para $t > 2$, o crescimento da função 2^t é maior.

d) Para $t = 3$, tem-se:

$f(t) = 2t \Rightarrow f(3) = 2 \cdot (3) = 6$

$f(t) = 2^t \Rightarrow f(3) = 2^3 = 8$

Logo, $8 - 6 = 2$, ou seja, 2 000 bactérias.

22. a) A amostra de bactérias aumentou no intervalo entre 20 °C e 60 °C; diminuiu no intervalo entre 80 °C e 120 °C e manteve-se estável nos intervalos entre 0 °C e 20 °C e entre 60 °C e 80 °C.

b) Para calcular a quantidade de bactérias, deve-se relacionar a temperatura com o intervalo e a função e verificar se é crescente, constante ou decrescente. Portanto:

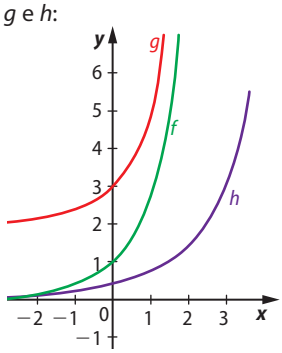
- 30 °C $\Rightarrow f(30) = 2^{0,1(30-10)} = 2^2 = 4$
  Ou seja, 400 000 bactérias.
- 50 °C $\Rightarrow f(50) = 2^{0,1(50-10)} = 2^4 = 16$
  Ou seja, 1 600 000 bactérias.
- 90 °C $\Rightarrow g(90) = 32 \cdot 2^{-0,2(90-80)} = 2^3 = 8$
  Ou seja, 800 000 bactérias.
- 110 °C $\Rightarrow g(110) = 32 \cdot 2^{-0,2(110-80)} = 2^{-1} = 0,5$
  Ou seja, 50 000 bactérias.

23. Para a função f ser decrescente necessariamente deve-se ter que $0 < a < 1$. Logo:
$0 < k - 3 < 1 \Rightarrow 3 < k < 4$

24. Calculado o valor numérico para cada valor de x nas respectivas funções:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = 3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
$g(x) = 3^x + 2$	$\frac{19}{9}$	$\frac{7}{3}$	3	5	11	29
$h(x) = 3^{x-2}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3

a) Considerando os pontos do quadro, é possível plotar os gráficos f, g e h:



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

b) Analisando os gráficos é possível observar que as funções são crescentes.

c) Os domínios e as imagens de cada função são:
$D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$;
$D(g) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \{y \in \mathbb{R} \mid y > 2\}$;
$D(h) = \mathbb{R}$ e $Im(h) = \mathbb{R}_+^*$

d) O gráfico de m equivale ao gráfico de f com um deslocamento de todos os pontos desse gráfico em 2 unidades na vertical para baixo.

e) O gráfico de q equivale ao gráfico de f com um deslocamento de todos os pontos desse gráfico em 2 unidades na horizontal para a esquerda.

25. a) Considerando a taxa de variação média com a média do rendimento entre o primeiro e sexto mês, pode-se calcular como:

$$T_{MÉDIA} = \frac{1017,61 - 1000}{5} = 3,524$$

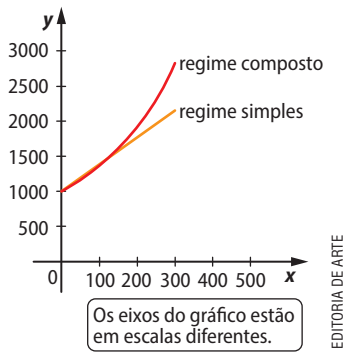
Portanto, o rendimento médio no período foi de R$ 3,52.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

b) Como o rendimento é de 0,35% ao mês e o valor de investimento inicial é de R$ 1.000,00, pode-se entender que a lei de formação da função que calcula o valor disponível é:
$f(x) = 1\,000 \cdot (1 + 0{,}0035)^x \Rightarrow f(x) = 1\,000 \cdot (1{,}0035)^x$

c) Considerando um período de 12 meses, utilizando uma calculadora, o cliente obterá um saldo disponível de:
$f(12) = 1000 \cdot (1{,}0035)^{12} \Rightarrow f(12) \simeq$ R$ 1.042,82

d) Construindo o gráfico segundo o enunciado:



Espera-se que os estudantes percebam que a aplicação sob regime de juro composto tem um crescimento muito maior do que a aplicação a juro simples. Além disso, espera-se que percebam que o primeiro gráfico se refere a uma função exponencial e o segundo, a uma função linear.

26. Para resolver as equações exponenciais, devem-se manter ambos os membros na mesma base e igualar os expoentes.

a) $2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$
$S = \{6\}$

b) $10^x = 10^3 \Rightarrow x = 3$
$S = \{3\}$

c) $3^{2x} = 3^5 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = \frac{5}{2}$
$S = \left\{\frac{5}{2}\right\}$

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow x = 5$
$S = \{5\}$

e) $\left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = \frac{25}{100} \Rightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{4x} = \left(\frac{1}{4}\right)^1 \Rightarrow 4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$
$S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$

f) $4^x = 4^{-3} \Rightarrow x = -3$
$S = \{-3\}$

g) $3^x = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$
$S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$

h) $4^x = \sqrt[3]{2^5} \Rightarrow 2^{2x} = 2^{\frac{5}{3}} \Rightarrow 2x = \frac{5}{3} \Rightarrow x = \frac{5}{6}$
$S = \left\{\frac{5}{6}\right\}$

27. Considerando a função $f(x) = 5^{2x-1}$, para calcular o valor de x, devem-se aplicar os conceitos de função, ou seja:

a) $5^{2x-1} = 125 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^3 \Rightarrow 2x - 1 = 3 \Rightarrow x = 2$

b) $5^{2x-1} = 1 \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

c) $5^{2x-1} = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R} \mid 5^{2x-1} = 0$

d) $5^{2x-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5^{2x-1} = 5^{-1} \Rightarrow 2x - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$

28. Para resolver as equações, devem-se manter ambos os membros da equação exponencial na mesma base e, em seguida, igualar os expoentes. Logo:

a) $2^{x-2} = \frac{8}{2^{x-3}} \Rightarrow 2^{x-2} = 2^{3-(x-3)} \Rightarrow 2^{x-2} = 2^{6-x} \Rightarrow$
$\Rightarrow x - 2 = 6 - x \Rightarrow x = 4$
$S = \{4\}$

b) $25^{2x+2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{5x-1} \Rightarrow 5^{2(2x+2)} = 5^{-5x+1} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4x + 4 = -5x + 1 \Rightarrow 9x = -3 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$
$S = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) $5^{x^2-2} : 25 = \left(\frac{1}{125}\right)^{-x} \Rightarrow 5^{x^2-4} = 5^{3x} \Rightarrow x^2 - 4 = 3x \Rightarrow$
$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Rightarrow x' = -1$ e $x'' = 4$
$S = \{-1, 4\}$

d) $\sqrt[3]{81^x} = \frac{1}{27} \Rightarrow 3^{\frac{4x}{3}} = 3^{-3} \Rightarrow \frac{4x}{3} = -3 \Rightarrow x = -\frac{9}{4}$
$S = \left\{-\frac{9}{4}\right\}$

29. Para resolver a equação, deve-se colocar em evidência 8^x no primeiro membro da equação exponencial:

$8^x\left(1 + \frac{1}{8} + 8\right) = 292 \Rightarrow 8^x\left(\frac{73}{8}\right) = 292$

Simplificando a equação e deixando ambos os membros da equação na base 2:

$2^{3x} = 2^5 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$S = \left\{\frac{5}{3}\right\}$

30. Para calcular $f(2 - x) = 2 \cdot f(x)$, antes deve-se calcular $f(2 - x)$ e, em seguida, igualar ao dobro de $f(x)$. Logo:

$f(2 - x) = 4^{2-x+1} \Rightarrow f(2 - x) = 2^{6-2x}$

$2 \cdot f(x) = 2 \cdot 4^{x+1} \Rightarrow f(x) = 2^{2x+3}$

$f(2 - x) = 2 \cdot f(x) \Rightarrow 2^{3-x} = 2^{2x+3} \Rightarrow 6 - 2x = 2x + 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow x = \frac{3}{4}$

31. Aplicando as técnicas de fatoração no numerador e denominador no primeiro membro da equação:

$\frac{2^x + 2^{2x}}{2^{2x} - 1} = 2 \Rightarrow \frac{2^x \cancel{\left(1 + 2^x\right)}}{\left(2^x - 1\right)\cancel{\left(2^x + 1\right)}} = 2 \Rightarrow \frac{2^x}{2^x - 1} = 2$

Fazendo $2^x = y$:

$\frac{2^x}{2^x - 1} = 2 \Rightarrow \frac{y}{y - 1} = 2 \Rightarrow y = 2$

Portanto, $2x = 2^1$, ou seja, $x = 1$.

32. Considerando $t = 0$ o instante em que havia 200 bactérias, tem-se $N_0 = 200$. Após 12 horas, havia 600 bactérias. Então:

$600 = 200 \cdot K^{12} \Rightarrow K^{12} = 3$

Após 48 horas do início da observação, tem-se:

$N(48) = 200 \cdot K^{48} = 200 \cdot (K^{12})^4 = 200 \cdot (3)^4 = 200 \cdot 81 = 16\,200$

Após 48 horas existirão 16 200 bactérias.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

33. Considerando que a função de resfriamento é $T(t) = T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t}$ e que, segundo o enunciado, os pontos (90, 0) e (270, −16) pertencem a ela, então pode-se concluir que:

a] $0 = -18 + \alpha \cdot 3^{90\beta}$ (I)

$-16 = -18 + \alpha \cdot 3^{270\beta}$ (II)

Da equação (I):

$\alpha = \frac{18}{3^{90\beta}}$

Substituindo α em (II):

$2 = \frac{18}{3^{90\beta}} \cdot 3^{270\beta} \Rightarrow \frac{1}{9} = 3^{180\beta} \Rightarrow 3^{-2} + 3^{180\beta} \Rightarrow \beta = -\frac{1}{90}$

Substituindo β na equação (I):

$\alpha = \frac{18}{3^{90\left(-\frac{1}{90}\right)}} = \frac{18}{3^{-1}} = 54$

b] Com $\alpha = 54$ e $\beta = -\frac{1}{90}$, a temperatura do congelador deve ser $\frac{2}{3}$ °C maior, ou seja, $T_A + \frac{2}{3}$. Logo:

$T(t) = T_A + \frac{2}{3} \Rightarrow T_A + \alpha \cdot 3^{\beta t} = T_A + \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha \cdot 3^{\beta t} = \frac{2}{3} \Rightarrow 54 \cdot 3^{-\frac{t}{90}} = \frac{2}{3} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{-\frac{t}{90}} = 3^{-4} \Rightarrow -\frac{t}{90} = -4 \Rightarrow t = 360$

Portanto, $t = 360$ minutos.

34. Ao considerar que a população fique reduzida à quarta parte do que era no início, deve-se considerar que $P(t) = \frac{P(0)}{4}$. Logo:

$P(t) = P(0) \cdot 2^{-0{,}25t}$

$\frac{P(0)}{4} = P(0) \cdot 2^{-\frac{t}{4}} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-\frac{t}{4}} \Rightarrow t = 8$

A população ficará reduzida à quarta parte em 8 anos.

35. Para resolver a equação é necessário colocar 2^x em evidência. Logo:

$2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 224$

$2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 4 + 2x \cdot 8 + 2^5 \cdot 7$

$2^x(2 + 4 + 8) = 2^5 \cdot 7$

$\frac{2^x \cdot 14}{7} = 2^5$

$2^{x+1} = 2^5 \Rightarrow x = 4$

$S = \{4\}$

36. Para resolver a equação, é necessário deixar ambos os membros com um termo e na mesma base. Para isso, devem-se utilizar as propriedades da potenciação.

$3^{3x-1} \cdot 3^{2(2x+3)} = 3^{3(3-x)}$

$3^{3x-1+4x+6} = 3^{9-3x} \Rightarrow 7x + 3x = 9 + 1 - 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10x = 4 \Rightarrow x = \frac{2}{5}$

37. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte forma:

$1^x + 5^x + 25^x = 3 \Rightarrow 5^{2x} + 5^x - 2 = 0$

Substituindo $5^x = y$, obtêm-se: $y^2 + y - 2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 1$ e $y'' = -2$.

Logo:

$5^x = 1 \Rightarrow 5^x = 5^0 \Rightarrow x = 0$

$5^x = -2 \Rightarrow$ Não há um número real que satisfaça a equação.

Portanto, $S = \{0\}$

38. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte forma:

$\frac{3^{2(5x-1)}}{3^{4(2x-3)}} = \frac{3^{3(5-3x)}}{3^{2x-5}} \Rightarrow \frac{3^{10x-2}}{3^{8x-12}} = \frac{3^{15-9x}}{3^{2x-5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{10x-2-8x+12} = 3^{15-9x-2x+5} \Rightarrow 3^{2x+10} = 3^{-11x+20} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x + 10 = -11x + 20 \Rightarrow x = \frac{10}{13}$

Portanto, $S = \left\{\frac{10}{13}\right\}$.

39. Substituindo os dados fornecidos pelo enunciado na fórmula:

$m = m_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5\,400}} \Rightarrow 1{,}25 = 5 \cdot 2^{\frac{-t}{5\,400}} \Rightarrow \frac{125}{100} = 5 \cdot 2^{\frac{-t}{5\,400}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{\cancel{5}}{4} = \cancel{5} \cdot 2^{\frac{-t}{5\,400}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{-2} = 2^{\frac{-t}{5\,400}} \Rightarrow \frac{t}{5\,400} = 2 \Rightarrow t = 10\,800$

Portanto, levarão 10 800 anos.

40. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte forma:

$3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2} \cdot 3 - 8 \cdot 3^{x^2} = 0 \Rightarrow 3 \cdot 5^{x^2} + 3^{x^2} \cdot (3 - 8) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot 5^{x^2} = 3^{x^2} \cdot 5 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2} = \left(\frac{5}{3}\right)^1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x' = -1$ ou $x'' = 1$

$S = \{-1, 1\}$

41. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte forma:

$3^{2\left(x+\frac{1}{2}\right)} - \frac{4 \cdot 3^x}{3} = -1 \Rightarrow 3^{2x-1} - \frac{4}{3} \cdot 3^x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{3^{2x}}{3} - \frac{4}{3} \cdot 3^x + 1 = 0$

Substituindo $3^x = y$:

$\frac{y^2}{3} - \frac{4}{3}y + 1 = 0 \Rightarrow y^2 - 4y + 3 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 1$ e $y'' = 3$

Como $3^x = y$:

$3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

$3^x = 1 \Rightarrow 3^x = 3^0 \Rightarrow x = 0$

$S = \{0, 1\}$

42. Aplicando as propriedades da potenciação, é possível escrever a equação da seguinte forma:

$s(x) = 3^{x-1} + 3^x \Rightarrow s(x) = \frac{3^x}{3} + 3^x \Rightarrow s(x) = 3^x\left(\frac{1}{3} + 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow s(x) = 3^x \cdot \frac{4}{3}$

$s(x) = 4 \Rightarrow 3^x \cdot \frac{\cancel{4}}{3} = \cancel{4} \Rightarrow 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$

43. Considerando a função $f(x) = 3^x$, podem-se encontrar os termos $f(x + 1)$ e $f(-x + 4)$. Logo:

$f(x + 1) = 3^{x+1}$

$f(-x + 4) = 3^{-x+4}$

Como $f(x + 1) + f(-x + 4) = 36$, então:

$3^{x+1} + 3^{-x+4} = 36 \Rightarrow 3x \cdot 3 + 3^{-x} \cdot 3^4 = 36$

Substituindo $3^x = y$:

$3y + \frac{81}{y} = 36 \Rightarrow y^2 - 12y + 27 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 3$ e $y'' = 9$

Como $3^x = y$:

$3^x = 9 \Rightarrow 3^x = 3^2 \Rightarrow x = 2$

$3^x = 3^1 \Rightarrow x = 1$

$S = \{1, 2\}$

44. I] Verdadeira.

Considerando que o instante inicial é $x = 0$:

$q(0) = 2^{5 - 0,5 \cdot 0} = 32$

Ou seja, no instante em que o processo foi iniciado, a quantidade de poluente era 32 mg/L.

II] Verdadeira.

Considerando o instante $x = 4$:

$q(4) = 2^{5 - 0,5 \cdot 4} = 8$

Ou seja, um quarto da quantidade inicial.

III] Falsa.

Considerando os instantes já calculados $q(0) = 32$ e $q(4) = 8$, pode-se perceber que a função não é crescente.

IV] Verdadeira.

Considerando $x = 2$:

$q(2) = 25 - 0,5 \cdot 2 = 16$

Ou seja, a metade da quantidade existente no início do processo.

V] Verdadeira.

Considerando $q(t) = 4$:

$2^{5 - 0,5}t = 2^2 \Rightarrow 5 - 0,5t = 2 \Rightarrow 3 = 0,5t \Rightarrow t = 6$

Portanto, somente na 6ª hora, após iniciado o processo, é que a quantidade de partículas atinge o nível recomendado.

45. Resposta possível: O reservatório terá a metade da sua capacidade após quantos meses de estiagem?

$V(t) = V_0 \cdot 2^{-0,05t} \Rightarrow \frac{V_0}{2} = V_0 \cdot 2^{-0,05t} \Rightarrow 2^{-1} = 2^{-0,05t}$

Igualando os expoentes:

$-1 = -0,05t \Rightarrow t = 20$

Portanto, a represa terá a metade da sua capacidade após 20 meses.

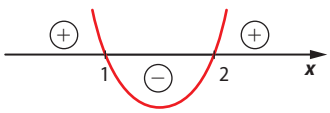
46. Para resolver as inequações, devem-se deixar ambos os membros na mesma base e verificar se ela é maior do que 1 ou pertence ao intervalo]0, 1[.

a] $2^{x^2 - 3x} \geqslant 2^{-2}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação. Logo:

$x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$

Resolvendo a equação $x^2 - 3x + 2 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 2$ e $x'' = 1$.



Como os intervalos maiores ou igual a 0 são $x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$, o conjunto solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 1 \text{ ou } x \geqslant 2\}$.

b] $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} < \left(\frac{1}{3}\right)^3$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação. Logo:

$2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{3}{2}\right\}$.

c] $(0,2)^{x-2} > (0,2)^0$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação. Logo:

$x - 2 < 0$

$x < 2$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$.

d] $2^{x+1} \cdot 2^{2(x-1)} \leqslant 2^{-5} \Rightarrow 2^{x+1+2x-2} \leqslant 2^{-5}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação. Logo:

$3x - 1 \leqslant -5 \Rightarrow x \leqslant -\frac{4}{3}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{4}{3}\right\}$.

e] $\left(\frac{3}{2}\right)^{x+1} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2(1+2x)} > \left(\frac{3}{2}\right)^{3(4x+3)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{x+1+2+4x} > \left(\frac{3}{2}\right)^{12x+9}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação. Logo:

$5x + 3 > 12x + 9 \Rightarrow -7x > 6 \Rightarrow x < -\frac{6}{7}$

Portanto:

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{6}{7}\right\}$

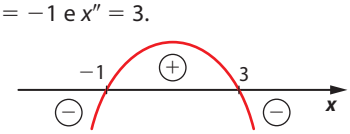
f] $(0,04)^{\frac{x^2-2x}{2}} \geqslant 0,008 \Rightarrow \left[(0,2)^2\right]^{\frac{x^2-2x}{2}} \geqslant (0,2)^3$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se inverter o sinal da inequação.

Logo:

$x^2 - 2x \leqslant 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$

Resolvendo a equação $x^2 - 2x - 3 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = -1$ e $x'' = 3$.



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Como os intervalos maiores ou igual a 0 estão entre as raízes, ou seja, entre -1 e 3, o conjunto solução será $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 3\}$.

47. Para resolver a inequação deve-se começar colocando o fator 3^x em evidência. Assim:

$3^{x+1} + 3^{2+x} > 108$

$3^x(3 + 9) > 108$

$3^x > 9 \Rightarrow 3^x > 3^2$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal de inequação. Portanto, $x > 2$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2\}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

48. Para a expressão representar um número real, o radicando deve ser maior ou igual a 0. Logo:

$2^x + 2^{x+1} - 12 \geqslant 0$

Para resolver a inequação, deve-se colocar o fator 2^x em evidência. Assim:

$2^x(1 + 2) \geqslant 12 \Rightarrow 2^x \geqslant 4 \Rightarrow 2^x \geqslant 2^2$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação, portanto $x \geqslant 2$.

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$

49. Para definir o domínio de ambas as funções, deve-se ter o radicando maior ou igual a 0.

a] $2^x - 2^{1-x} \geqslant 0$

Para resolver a inequação, deve-se colocar o fator 2^x em evidência. Assim:

$2^x \geqslant 2^{1-x}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação, logo:

$x \geqslant 1 - x \Rightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$

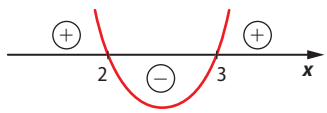
$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{1}{2}\right\}$

b] $(0,1)^{x^2-5x} - (0,1)^{-6} \geqslant 0 \Rightarrow (0,1)^{x^2-5x} \geqslant (0,1)^{-6}$

Como a base é positiva e menor do que 1, deve-se manter o sinal da inequação. Logo:

$x^2 - 5x + 6 \leqslant 0$

Ao resolver a equação $x^2 - 5x + 6 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 2$ e $x'' = 3$.



$D(g) = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leqslant x \leqslant 3\}$

50. Considerando as funções $f(x) = 2^x - 1$, $g(x) = -x^2 + 4$ e $h(x) = (2^x - 1)(-x^2 + 4)$:

a] $h(-1) = (2^{-1} - 1)(-1 + 4)$

$h(-1) = -\frac{3}{2}$

$h(1) = (2^1 - 1)(-1 + 4) = 3$

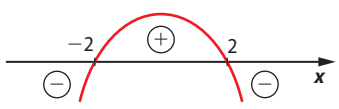
b] Para encontrar as soluções para que $h(x) < 0$, deve-se estudar o sinal de $g(x)$ e $f(x)$. Logo:

$f(x) = (2^x - 1) \Rightarrow 2^x - 1 = 0 \Rightarrow 2^x = 2^0 \Rightarrow x = 0$

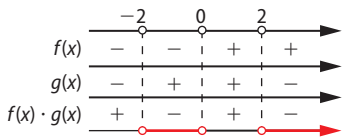
Assim, se $x > 0$, $f(x) > 0$ e, se $x < 0$, $f(x) < 0$.

$g(x) = -x^2 + 4$

Resolvendo a equação $-x^2 + 4 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = -2$ e $x'' = 2$.



Fazendo o quadro de sinais:



Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

51. Considerando a inequação $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$(2^x)^2 - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$

Substituindo $2^x = y$, temos: $y^2 - 10y + 16 < 0$.

Resolvendo a equação $y^2 - 10y + 16 = 0$, obtêm-se as raízes $y' = 2$ e $y'' = 8$.

Como a parábola possui a concavidade voltada para cima, o intervalo em que a função é negativa está localizado entre as raízes, ou seja, $2 < y < 8$.

Como $2^x = y$, então:

$2 < 2^x < 8 \Rightarrow 2^1 < 2^x < 2^3 \Rightarrow 1 < x < 3$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$

52. Para resolver a inequação $2^{1+x} + \sqrt{8} \geqslant \sqrt{72}$, ambos os membros da inequação devem ter um termo com a mesma base. Logo:

$2^{1+x} + \sqrt{8} \geqslant \sqrt{72} \Rightarrow 2^{1+x} \geqslant \sqrt{72} - \sqrt{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^{1+x} \geqslant \sqrt{8}\left(\sqrt{9} - 1\right) \Rightarrow 2^{1+x} \geqslant 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2 \Rightarrow 2^{1+x} \geqslant 2^{\frac{5}{2}}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal de inequação. Assim:

$1 + x \geqslant \frac{5}{2} \Rightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

Portanto, $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant \frac{3}{2}\right\}$.

53. Para resolver a inequação, deve-se deixar cada membro na mesma base, ou seja:

$1 < 4^{\frac{x}{4}} \leqslant 64 \Rightarrow 4^0 < 4^{\frac{x}{4}} \leqslant 4^3 \Rightarrow 0 < \frac{x}{4} \leqslant 3 \Rightarrow 0 < x \leqslant 12$

Como a solução é representada por números inteiros, então o conjunto solução é $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

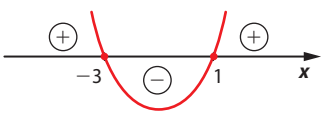
54. Para encontrar a solução da inequação, devem-se deixar ambos os membros com um termo de mesma base. Logo:

$5^{x^2} \cdot 5^{2x-1} \cdot 5^{-3} \leqslant 5^{-1} \Rightarrow 5^{x^2+2x-1-3} \leqslant 5^{-1}$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal da inequação. Assim:

$x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = -3$ e $x'' = 1$.



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant x \leqslant 1\}$.

55. Resposta possível: Qual é o tempo mínimo necessário para que a planta estudada atinja uma altura maior do que 90 cm?

O problema propõe que se calculem os possíveis valores de t para que $h(t) > 90$. Logo:

$2{,}52 + 0{,}04 \cdot 3^{0{,}14t} \cdot 90 \Rightarrow 3^{0{,}14t} > \frac{90 - 2{,}52}{0{,}04} \Rightarrow 3^{0{,}14t} > 3^7$

Como a base é maior do que 1, deve-se manter o sinal de inequação. Assim:

$0{,}14t > 7 \Rightarrow t > 50$

O tempo mínimo será de 50 dias.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

56. Para resolver a inequação devem-se, primeiro, aplicar as propriedades da potenciação para deixar as bases, em ambos os membros, iguais. Logo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{4}\right)^{2x-\frac{3}{2}} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{4x-3}$$

Como a base é um número que pertence ao intervalo]0, 1[, então deve-se inverter o sinal da inequação, ou seja: $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Resolvendo a equação $x^2 - 4x + 3 = 0$, obtêm-se as raízes $x' = 1$ e $x'' = 3$.

Como o esboço do gráfico seria uma parábola de concavidade voltada para cima, pois $a > 0$, então o intervalo negativo está localizado entre as raízes, ou seja, $1 < x < 3$ ou ainda]1, 3[.

Resposta: alternativa **d**

57. Analisando as igualdades de cada item:

a] Falsa.

$$\left(2^4\right)^{\frac{3}{4}} - \left(3^3\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \Rightarrow 2^3 - 3^2 = 1 \Rightarrow -1 \neq 1$$

b] Verdadeira.

$$2^{\frac{x}{2}} = 2^6 \Rightarrow \frac{x}{2} = 6 \Rightarrow x = 12$$

c] Falsa.

$$3^{-x} \leqslant 27 \Rightarrow -x \leqslant 3 \Rightarrow x \geqslant -3$$

Portanto, $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant -3\}$.

d] Falsa.

$$\frac{9^{15} \cdot 11^{15}}{3^{30} \cdot 11^{30}} = 3^{-15} \Rightarrow \frac{3^{30} \cdot 11^{-15}}{3^{30}} = 3^{-15} \Rightarrow 11^{-15} \neq 3^{-15}$$

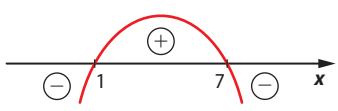
Resposta: alternativa **b**

58. Para encontrar a solução, deve-se manter a mesma base em ambos os lados da inequação. Logo:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-8x+5} > 4 \Rightarrow \left[(2)^{-1}\right]^{x^2-8x+5} > 2^2 \Rightarrow 2^{-x^2+8x-5} > 2^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2 + 8x - 7 > 0$$

Resolvendo essa inequação do 2º grau e fazendo o respectivo estudo dos sinais, obtém-se: $x' = 1$ ou $x'' = 7$.



EDITORIA DE ARTE

Logo, apenas dois números inteiros ímpares pertencem ao intervalo]1, 7[, a saber: 5 e 3.

Resposta: alternativa **b**

59. O domínio da função $f(x) = \sqrt{2^{x-2} - 1}$ é determinado por todos os valores maiores ou igual a zero do radicando. Logo:

$$2^{x-2} - 1 \geqslant 0 \Rightarrow 2^{x-2} \geqslant 1 \Rightarrow 2^{x-2} \geqslant 2^0$$

Como a base é maior do que 1, o sinal da inequação é mantido. Assim:

$$x - 2 \geqslant 0 \Rightarrow x \geqslant 2$$

Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$.

60. Considerando $t = 2$, encontram-se os seguintes valores numéricos de cada função:

$F_1(2) = 2^2 + 96 = 4 + 96 = 100$

$F_2(2) = 9 \cdot 2^2 + 64 = 9 \cdot 4 + 64 = 36 + 64 = 100$

Ou seja, para $t = 2$ pode-se concluir que $B_1 = B_2$.

Considerando $t = 3$:

$F_1(3) = 3^2 + 96 = 9 + 96 = 105$

$F_2(3) = 9 \cdot 3^2 + 64 = 9 \cdot 9 + 64 = 81 + 64 = 145$

Assim, pode-se concluir que, após o instante $t = 2$, o crescimento de B_1 será menor do que o de B_2.

Resposta: alternativa **b**

Atividades complementares

1. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado:

$$x^2 + 1 \Rightarrow \left[(1{,}2)^{-\frac{1}{2}}\right]^2 + 1 \Rightarrow \left(\frac{6}{5}\right)^{-1} + 1 \Rightarrow \frac{5}{6} + 1 \Rightarrow \frac{11}{6}$$

Resposta: alternativa **b**

2. Aplicando as propriedades da fatoração:

$$\frac{2^{6n} - 1}{2^{6n} + 2^{3n+1} + 1} = \frac{\left(2^{3n} - 1\right)\left(2^{3n} + 1\right)}{\left(2^{3n} + 1\right)^2} = \frac{2^{3n} - 1}{2^{3n} + 1}$$

Resposta: alternativa **e**

3. Resolvendo ambas as equações:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{256}{81} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^4 \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-4} \Rightarrow x = -4$$

$$\left(\frac{y}{3}\right)^2 = 729 \Rightarrow \left(\frac{y}{3}\right)^2 = 3^6 \Rightarrow y^2 = 3^8 \Rightarrow y = 3^4$$

Portanto:

$y + 3x = 81 + 3(-4) = 69$

Resposta: alternativa **04**

4. Resolvendo a expressão:

$$\left(2^{-3,5} \cdot \sqrt{50}\right) + 0{,}125 + \frac{7}{28} =$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2 \cdot 5^2}}{\sqrt{2^7}}\right) + \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

Resposta: alternativa **a**

5. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado:

$f(1) = -2 + g(2)$, o valor de $f(g(f(-1)))$

$f(x) = 2^{x+k}$ e $g(x) = x^2 + m$

$f(0) = g(0) \Rightarrow 2^k = m$

$f(1) = -2 + g(2) \Rightarrow 2^{1+k} = -2 + 4 + m \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \cdot 2^k = 2 + m \Rightarrow m = 2$

$2^k = m \Rightarrow k = 1$

Portanto:

$f(-1) = 2^{-1+1} = 1$

$g(f(-1)) = g(1) = 1^2 + 2 = 3$

$f(g(f(-1))) = f(3) = 2^{3+1} = 16$

Resposta: alternativa **d**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

6. Segundo os dados fornecidos pelo gráfico, pode-se concluir que os pontos (2, 8) e (0, −1) pertencem à função *f*. Logo:

$f(0) = a \cdot 3^0 + b \Rightarrow a + b = -1$

$f(2) = a \cdot 3^2 + b \Rightarrow 9a + b = 8$

Portanto, chega-se no sistema:

$\begin{cases} a + b = -1 \\ 9a + b = 8 \end{cases}$

Subtraindo a segunda equação da primeira: $a = \frac{9}{8}$.

Substituindo o valor de *a* na primeira equação:

$a + b = -1 \Rightarrow b = -1 - \frac{9}{8} \Rightarrow b = -\frac{17}{8}$

Portanto, pode-se afirmar:

$a \cdot b = \frac{9}{8} \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = -\frac{153}{64}$

Logo, é um número situado entre −4 e −1.

Resposta: alternativa **a**

7. Segundo o enunciado, deve-se calcular a população de bactérias depois de 20 minutos. Porém, a função é dada em hora, por isso deve-se transformar 20 minutos em horas, ou seja: $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$.

Portanto:

$p(t) = 40 \cdot 2^{3t} \Rightarrow p\left(\frac{1}{3}\right) = 40 \cdot 2^{3 \cdot \frac{1}{3}} \Rightarrow p\left(\frac{1}{3}\right) = 80$

Resposta: alternativa **d**

8. Como o volume aumenta 20% a cada hora, pode-se concluir que, depois de uma hora, o volume será de 1,2 V. Passada mais uma hora, esse volume de 1,2 V aumentará mais 20%, ou seja:

1,2 V · 1,2 V = 1,44 V

Portanto, um pouco menos da metade.

Resposta: alternativa **01**

9. Considerando que, em uma condição inicial $t = 0$ a quantidade de substância é 800 g, pode-se afirmar que:

$Q(t) = k \cdot 2^{-0,5t} \Rightarrow Q(0) = k \cdot 2^{-0,5 \cdot 0} \Rightarrow 800 = k \Rightarrow k = 800$

Como 25% de 800 é 200, o tempo necessário para que a quantidade de uma substância chegue a esse valor é:

$200 = 800 \cdot 2^{-0,5t} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{-0,5t} \Rightarrow t = 4$

Resposta: alternativa **b**

10. Segundo as informações contidas no gráfico, pode-se observar que os pontos (0, 60 000) e (1, 54 000) pertencem à função *f*. Logo:

$f(0) = b \cdot a^0 \Rightarrow 60\,000 = b$

$f(1) = 54\,000 \cdot a^1 \Rightarrow 54\,000 = 60\,000 \cdot a \Rightarrow a = 0,9$

Portanto, a função de depreciação é $f(t) = 60\,000 \cdot 0,9^t$

Então, ao calcular *f*(2):

$f(2) = 60\,000 \cdot 0,9^2 \Rightarrow f(2) = 48\,600$

Resposta: alternativa **c**

11. Aplicando as propriedades da potenciação:

$\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)^{2x-2} = \frac{1}{27} \Rightarrow \left(3^{-\frac{3}{2}}\right)^{2x-2} = 3^{-3} \Rightarrow 3^{-3x+3} = 3^{-3} \Rightarrow$

$\Rightarrow -3x + 3 = -3 \Rightarrow x = 2$

Resposta: alternativa **d**

12. Aplicando as propriedades da potenciação na equação $3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$, pode-se escrevê-la da seguinte forma:

$3^{2k} - 4 \cdot 3^k + 3 = 0 \Rightarrow (3^k)^2 - 4 \cdot 3^k + 3 = 0$

Fazendo $3^k = y$, tem-se $y^2 - 4y + 3 = 0$ e, resolvendo essa equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y' = 3$ e $y'' = 1$.

$y' = 3 \Rightarrow 3^k = 3 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow k^2 = 1$

$y'' = 1 \Rightarrow 3^k = 3^0 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow k^2 = 0$

Resposta: alternativa **b**

13. Considerando as informações do enunciado, pode-se concluir que:

A primeira sentença é **verdadeira**, pois, para a função atingir $5 \cdot 10^4$, é necessário que o denominador da função seja 1. Porém, isso não é possível, pois o denominador sempre será maior do que 1.

A segunda sentença é **falsa**, pois para $t = 0$

$P(0) = \frac{5 \cdot 10^4}{1 + 200e^{\frac{-1}{10} \cdot 0}} = \frac{5 \cdot 10^4}{201} \simeq 249.$

A terceira sentença é **falsa**. A função *P* é crescente no intervalo [0, 100].

A quarta sentença é **verdadeira**. Segundo o gráfico, no instante $t = 40$, há mais de 10 000 bactérias.

A quinta sentença é **falsa**. O contradomínio é diferente da imagem.

Portanto, a sequência correta é V-F-F-V-F.

Resposta: alternativa **b**

14. Como $V(t) = 10\,000 \cdot (0,9)^t$ é a função que calcula a depreciação, então:

$V(t) = 10\,000 \cdot (0,9)^t \Rightarrow 8\,100 = 10\,000 \cdot (0,9)^t \Rightarrow$

$\Rightarrow (0,9)^2 = (0,9)^t \Rightarrow t = 2$

Resposta: alternativa **a**

15. De acordo com o enunciado, depois de 10 dias, ou seja, $t = 10$, a população de insetos reduziu à quarta parte da população inicial, ou seja, $\frac{N_0}{4}$. Logo:

$N(t) = N_0 \cdot 2^{kt} \Rightarrow \frac{N_0}{4} = N_0 \cdot 2^{k \cdot 10} \Rightarrow 2^{-2} = 2^{10k} \Rightarrow k = -5^{-1}$

Resposta: alternativa **b**

16. Para calcular o tempo que a lagoa vai conter 9 271 peixes, deve-se considerar que $n(T) = 9\,271$. Logo:

$n(T) = 10\,000 - 3^{\frac{T}{3}-2} \Rightarrow 9\,271 = 10\,000 - 3^{\frac{T}{3}-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 3^{\frac{T}{3}-2} = 10\,000 - 9\,271 \Rightarrow 3^{\frac{T}{3}-2} = 729 \Rightarrow 3^{\frac{T}{3}-2} = 3^6$

Portanto, $\frac{T}{3} - 2 = 6 \Rightarrow \frac{T}{3} = 8 \Rightarrow T = 24$

Resposta: alternativa **c**

Atividades

1. Aplicando a definição e as propriedades dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log_9 1 = x \Leftrightarrow 9^x = 1 \Rightarrow 9^x = 9^0 \Rightarrow x = 0$ (definição)

b) $\log_8 8 = x \Leftrightarrow 8^x = 8^1 \Rightarrow x = 1$ (definição)

c) $\log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{1}{10}\right)^3 = x \Leftrightarrow \left(\frac{1}{10}\right)^x = \left(\frac{1}{10}\right)^3 \Rightarrow x = 3$ (definição)

d) $5^{\log_5 7} = x \Rightarrow x = 7$ (4ª propriedade)

e) $\log_{\sqrt{10}} \sqrt{10} = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{10}\right)^x = \left(\sqrt{10}^1\right) \Rightarrow x = 1$ (definição)

f) $\log_{\frac{1}{3}} 3^5 = x \Leftrightarrow (3)^{-1x} = 3^5 \Rightarrow x = -5$ (definição)

2. Aplicando a definição dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log_{\sqrt{8}} 4 = x \Leftrightarrow \left(\sqrt{8}\right)^x = 4 \Rightarrow 2^{\frac{3x}{2}} = 2^2 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$

b) $\log_5 0{,}000064 = x \Leftrightarrow 5^x = 0{,}000064 \Rightarrow 5^x = \frac{2^6}{10^6} \Rightarrow$
$\Rightarrow 5^x = 5^{-6} \Rightarrow x = -6$

c) $\log_{49} \sqrt[3]{7} = x \Leftrightarrow 7^{2x} = 7^{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$

d) $\log_2 \frac{1}{16} = x \Leftrightarrow 2^x = 2^{-4} \Rightarrow x = -4$

e) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{32} = x \Leftrightarrow 2^{-x} = 2^{\frac{5}{3}} \Rightarrow x = -\frac{5}{3}$

f) $\log_{\frac{1}{4}} 1\,024 = x \Leftrightarrow 2^{-2x} = 2^{10} \Rightarrow x = -5$

3. a) Considere $\log_5 \frac{1}{25} = x$ e $\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = y$. Pela definição, obtêm-se:

$\log_5 \frac{1}{25} = x \Leftrightarrow 5^x = 5^{-2} \Rightarrow x = -2$

$\log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = y \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^y = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow y = -2$

$\log_5 \frac{1}{25} + \log_{\frac{2}{3}} \frac{9}{4} = x + y = -2 + (-2) = -4$

b) Considere $\log_{\frac{1}{3}} 27 = x$, $\log_{10} 0{,}001 = y$ e $\log_{0,1} 10\sqrt{10} = z$.

Pela definição, obtêm-se:

$\log_{\frac{1}{3}} 27 = x \Leftrightarrow 3^{-x} = 3^3 \Rightarrow x = -3$

$\log_{10} 0{,}001 = y \Leftrightarrow 10^y = 10^{-3} \Rightarrow y = -3$

$\log_{0,1} 10\sqrt{10} = z \Leftrightarrow 10^{-z} = 10^{\frac{3}{2}} \Rightarrow z = -\frac{3}{2}$

$\log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_{10} 0{,}001 - \log_{0,1} 10\sqrt{10} = x + y - z =$
$= -3 + (-3) - \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}$

4. a) Aplicando a 2ª e a 3ª propriedades, obtém-se: $1 - (-7) = 8$

b) Aplicando a 4ª propriedade em cada termo, obtém-se:

$27 : \left(\frac{1}{2}\right) = 54$

c) Aplicando a 1ª e a 3ª propriedades, tem-se: $0^5 = 0$

d) Aplicando a 1ª propriedade e a definição, tem-se:

$\frac{0 + (-2)}{(-6) \cdot \left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{-2}{\frac{-9}{2}} = \frac{4}{9}$

5. Considerando as informações do enunciado, têm-se:

$a = \log_{10} 0{,}001 = -3$; $b = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64} = 6$; $c = 3 \cdot \log_2 8 = 9$.

Portanto, a equação será: $-3x^2 + 6x + 9 = 0$

Ao resolver a equação, obtêm-se as raízes $x' = -1$ ou $x'' = 3$.

$S = \{-1, 3\}$

6. Aplicando propriedades da potenciação e dos logaritmos, obtém-se:

$m = 2^{5 + \log_2 3} + 3^{\log_3 7 + \log_3 2}$

$m = 2^5 \cdot 2^{\log_2 3} + 3^{\log_3 7} \cdot 3^{\log_3 2}$

$m = 32 \cdot 3 + 7 \cdot 2$

$m = 96 + 14 \Rightarrow m = 110$

7. Seja x o número a ser calculado. Tem-se:

$\log_p x = 4 \Leftrightarrow p^4 = x$

$\log_{\frac{p}{3}} x = 8 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{3}\right)^8 = x$

Portanto: $p^4 = \left(\frac{p}{8}\right)^8 \Rightarrow p^4 = \frac{p^8}{6\,561} \Rightarrow x = \frac{x^2}{6\,561} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6\,561x = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 0$ (não satisfaz a condição de existência) ou $x'' = 6\,561$.

O número é 6 561.

8. Considerando a condição de existência dos logaritmos, conclui-se que:

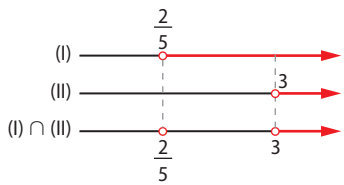
a) $1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$

$\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\}$

b) $5x - 2 > 0$ e $x - 3 > 0$

$5x > 2 \Rightarrow x > \frac{2}{5}$

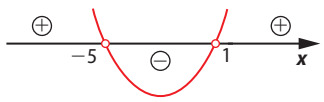
$x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$



$\{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

c) $x^2 + 4x - 5 > 0$

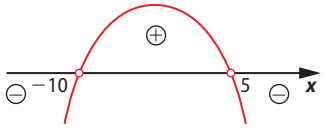
Resolvendo a inequação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = -5$ ou $x'' = 1$.



$\{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 1\}$

d) $50 - 5x - x^2 > 0$

Resolvendo a inequação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 5$ ou $x'' = -10$.



$\{x \in \mathbb{R} \mid -10 < x < 5\}$

GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

9. Considerando $\log 11 \simeq 1{,}041$ e as propriedades de produto e quociente dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log 110 = \log (11 \cdot 10) = \log 11 + \log 10 =$
$= 1{,}041 + 1 \simeq 2{,}041$

b) $\log 121 = \log (11 \cdot 11) = \log 11 + \log 11 =$
$= 1{,}041 + 1{,}041 \simeq 2{,}082$

c) $\log \frac{1}{11} = \log 1 - \log 11 = 0 - 1{,}041 \simeq -1{,}041$

d) $\log \sqrt{1\,331} = \log (11)^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \cdot \log 11 = \frac{3}{2} \cdot 1{,}041 \simeq 1{,}562$

e) $\log 1{,}21 = \log \frac{121}{100} = \log 121 - \log 100 =$
$= 2{,}082 - 2 \simeq 0{,}082$

f) $\log 0{,}121 = \log \frac{121}{1\,000} = \log 121 - \log 1\,000 =$
$= 2{,}082 - 3 \simeq -0{,}918$

10. Aplicando as propriedades de produto e quociente dos logaritmos, obtêm-se:

a) $\log 5 + \log 200 = \log (5 \cdot 200) = \log 1\,000 = 3$

b) $\log 100 + \log 50 + \log 10 + \log 2 =$
$= \log (100 \cdot 50 \cdot 10 \cdot 2) = \log 100\,000 = 5$

c) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 2^3 = 3$

d) $\log_5 8 + \log_5 12{,}5 - \log_5 4 = \log_5 \frac{8 \cdot 12{,}5}{4} = \log_5 5^2 = 2$

11. Aplicando as propriedades da potenciação e dos logaritmos, em cada item, obtêm-se:

a) $\log_c \sqrt{abc} \Rightarrow \frac{\log_x \sqrt{abc}}{\log_x c} =$
$= \frac{\frac{1}{2}(\log_x a + \log_x b + \log_x c)}{\log_x c} = \frac{\frac{1}{2}(6 + 4 + 2)}{2} = 3$

b) $\log_c (a^3 \cdot b^2) = \frac{\log_x (a^3 \cdot b^2)}{\log_x c} = \frac{3\log_x a + 2\log_x b}{\log_x c} =$
$= \frac{3 \cdot 6 + 2 \cdot 4}{2} = 13$

12. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), obtém-se:

$\log_2 3 \cdot \log_3 2 = \log_2 3 \cdot \frac{\log_2 2}{\log_2 3} = \cancel{k} \cdot \frac{\log_2 2}{\cancel{k}} = 1$

13. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), obtém-se:

$\cancel{\log_3 2} \cdot \frac{\cancel{\log_3 5}}{\cancel{\log_3 2}} \cdot \frac{\log_3 3}{\cancel{\log_3 5}} = \log_3 3 = 1$

14. Aplicando a propriedade dos logaritmos (mudança de base), para deixar todos os termos na base 5, obtém-se:

$\frac{\log_5 5}{\log_5 3} \cdot \frac{\log_5 27}{\log_5 4} \cdot \frac{\log_5 2^{\frac{1}{3}}}{\log_5 25} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{1}{\cancel{\log_5 3}} \cdot \frac{3\cancel{\log_5 3}}{2\cancel{\log_5 2}} \cdot \frac{\frac{1}{3}\cancel{\log_5 2}}{2} = \frac{1}{4}$

15. Antes de resolver o sistema, deve-se considerar a condição de existência dos logaritmos na segunda equação, ou seja, $a > 0$ e $b > 0$.
Da primeira equação, obtém-se: $a + b = 20 \Rightarrow a = 20 - b$ (I)
Aplicando a propriedade de produtos e a definição dos logaritmos na segunda equação, obtém-se:
$\log (a \cdot b) = 2 \Rightarrow a \cdot b = 10^2 \Rightarrow a \cdot b = 100$ (II)
Substituindo (I) em (II):
$(20 - b) \cdot b = 100 \Rightarrow 20b - b^2 = 100 \Rightarrow b^2 - 20b + 100 = 0$
Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $b' = b'' = 10$.
Substituindo em (I), temos:
$b = 10 \Rightarrow a = 20 - 10 \Rightarrow a = 10$
Como esses valores satisfazem à condição de existência, conclui-se que $a = 10$ e $b = 10$.
$S = \{(10, 10)\}$

16. Aplicando as propriedades dos logaritmos (produto e quociente) no $\log 375$, obtém-se:

$\log 375 = \log (3 \cdot 5^3) = \log 3 + 3\log 5 = y + 3 \cdot \log \left(\frac{10}{2}\right) =$
$= y + 3(\log 10 - \log 2) = y + 3(1 - x) = y + 3 - 3x$

17. Para processar 64 *bits*, tem-se:
$\log 64 = \log 2^6 = 6\log 2$
Como o enunciado não fornece o valor para $\log 5$, então pode-se considerar que $2 = \frac{10}{5}$. Assim:
$6\log 2 = 6 \cdot \log \left(\frac{10}{5}\right) = 6(\log 10 - \log 5) = 6 \cdot 0{,}301 = 1{,}806$
Será necessário 1,806 milissegundo.

18. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $-0{,}15490$
b) $-0{,}92082$
c) $2{,}92117$
d) -5
e) $3{,}21888$
f) $-0{,}08338$

19. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) 76
b) 57
c) 493
d) 2,86

20. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $10^{-0{,}5} = 0{,}3162$
b) $10^{-0{,}15} = 0{,}7079$
c) $\log 0{,}5 = -0{,}3010$
d) $\log 2 = 0{,}3010$
e) $\ln 10 = 2{,}3026$
f) $\ln 2 = -0{,}6931$
g) $\ln 0{,}15 = -1{,}8971$
h) $\ln 0{,}005 = -5{,}2983$

21. Utilizando uma calculadora podem-se obter os valores a seguir:

Número (N)	Potência de 10	$\log N$
75	$10^{1{,}875061}$	1,875061
643	$10^{2{,}808210}$	2,808210
1 320	$10^{3{,}120573}$	3,120573
1 000 000	10^6	6
0,00001	10^{-5}	-5
0,7	$10^{-0{,}154901}$	$-0{,}154901$
0,834	$10^{-0{,}078833}$	$-0{,}078833$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

22. Utilizando uma calculadora, obtêm-se:

a) $e^{1,098612289} = b \Rightarrow b = 3$

b) $e^{1,945910149} = b \Rightarrow b = 7$

c) $e^{-0,69314718} = b \Rightarrow b = 0,5$

d) $e^{-1} = b \Rightarrow b \simeq 0,367879$

e) $e^{0} = b \Rightarrow b = 1$

23. Usando a calculadora para calcular ln $x = 1,5119$, tem-se $x = 32,5$.

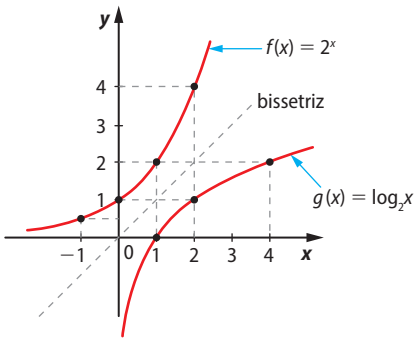
24. Com o uso de uma calculadora, obtêm-se os seguintes valores:

$10^{0,7} = 5$

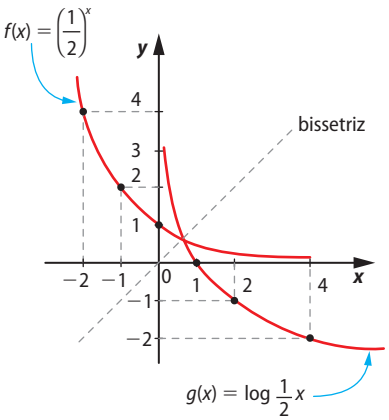
$10^{1,4} = 10^{0,7 \cdot 2} \Rightarrow (10^{0,7})^2 = 5^2 = 25$

Portanto: $10^{1,4} - 5 \cdot 10^{0,7} = 25 - 5 \cdot 5 = 25 - 25 = 0$

25. a)



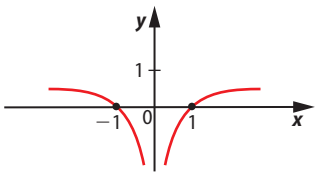
b)



26. $y = \log |x|$

Como $|x|$ é sempre um valor positivo, o valor de x pode ser um número real qualquer, desde que $x \neq 0$.

Portanto, a função $\log |x|$ é simétrica à função $\log |-x|$ em relação ao eixo das ordenadas.

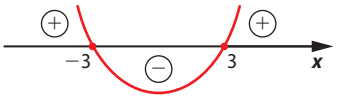


$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

$Im(f) = \{y \in \mathbb{R}\}$

27. Para encontrar o domínio de f, deve-se analisar a função em três partes. Veja a seguir:

I) Analisando a inequação $x^2 - 9 \geqslant 0$, obtêm-se os intervalos $x \leqslant -3$ ou $x \geqslant 3$, que satisfazem à condição.

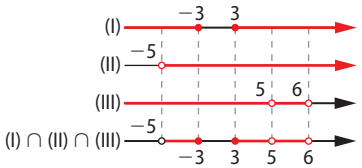


II) $x + 5 > 0 \Rightarrow x > -5$

III) $6 - x > 0$ e $6 - x \neq 1$

$x < 6$ e $x \neq 5$

Fazendo a intersecção entre as análises, obtêm-se:

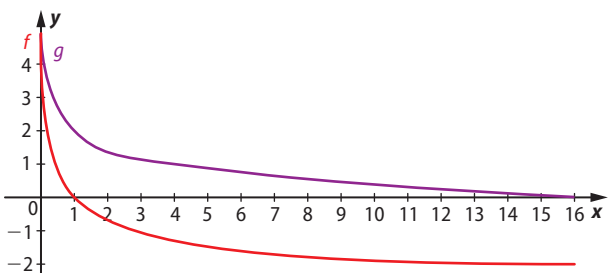


Portanto, $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 < x \leqslant -3$ ou $3 \leqslant x < 6$ e $x \neq 5\}$.

28. Utilizando a definição dos logaritmos, obtêm-se:

x	$f(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$	$g(x) = 2 + \log_{\frac{1}{4}} x$
$\frac{1}{16}$	2	4
$\frac{1}{4}$	1	3
1	0	2
4	−1	1
16	−2	0

a)



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

b) Se considerar duas abscissas quaisquer, por exemplo, x_1 e x_2, em que $x_1 < x_2$, em qualquer uma das funções, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$ ou, analogamente, $g(x_1) > g(x_2)$. Portanto, as funções são decrescentes.

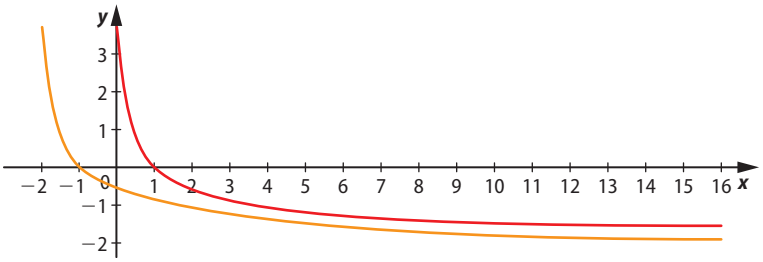
c) O domínio de ambas as funções é o conjunto dos números reais estritamente positivos. A imagem de ambas as funções é o conjunto dos números reais, ou seja:

$D(f) = \mathbb{R}_+^*$ e $D(g) = \mathbb{R}_+^*$, $Im(f) = \mathbb{R}$ e $Im(g) = \mathbb{R}$

d) A função $g(x)$ pode ser expressa como $f(x) + 2$ e, ao adicionarmos duas unidades à função $f(x)$, há um deslocamento do gráfico em duas unidades na vertical para cima. Por exemplo, nesse caso, $f(1) = 0$ e $g(1) = 2$.

e) Ao subtrairmos duas unidades na função $f(x)$, há um deslocamento do gráfico em duas unidades na vertical para baixo.

f] Ao adicionarmos duas unidades à incógnita x da função $f(x)$, há um deslocamento do gráfico em duas unidades na horizontal para a esquerda.
Para verificar a resposta, é possível construir os gráficos de f e de g.



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

29. a] Para encontrar o valor numérico em cada caso, deve-se substituir o valor da abscissa em cada função.
Logo:

$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\log_2\left(\frac{3}{2}-1\right)=2\log_2\frac{1}{2}=-2$

$f(2) = 2\log_2(2-1) = 2\log_2(1) = 0$

$f(3) = 2\log_2(3-1) = 2\log_2(2) = 2$

$g(-4)=\log_2\left(1-\frac{-4}{4}\right) = \log_2(1+1) = 1$

$g(0)=\log_2\left(1-\frac{0}{4}\right) = \log_2(1) = 0$

$g(2)=\log_2\left(1-\frac{2}{4}\right)=\log_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1$

b] Para $f(x) = g(x)$, tem-se:

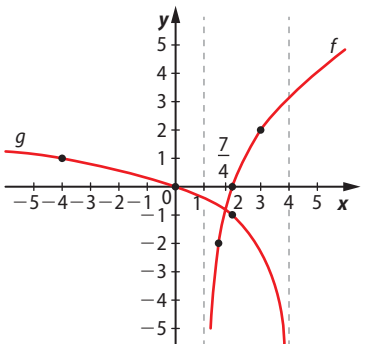
$2\log_2(x-1)=\log_2\left(1-\frac{x}{4}\right)\Rightarrow\log_2(x-1)^2=\log_2\left(1-\frac{x}{4}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2=\left(1-\frac{x}{4}\right)\Rightarrow 4x^2-8x+x=0\Rightarrow x(4x-7)=0$

Resolvendo a equação produto, obtêm-se as raízes $x' = 0$ ou $x''=\frac{7}{4}$.

Como a resposta deve pertencer ao intervalo $1 < x < 4$, então $x=\frac{7}{4}$.

c]



30. a] Aplicando as propriedades da potenciação e reescrevendo a função, obtém-se:

$f(x) = 10^{1+x} + 10^{1-x}\Rightarrow f(x) = 10\cdot 10^x+\frac{10}{10^x}$

Substituindo x por $\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)$, vem:

$f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=10\cdot 10\log_{10}^{\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{10}{10\log_{10}^{\left(2+\sqrt{3}\right)}}\Rightarrow f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=10\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{10}{2+\sqrt{3}}$

Racionalizando a segunda parcela da função, temos:

$\frac{10}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{10\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=20-20\sqrt{3}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Assim: $f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=10\cdot\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{10}{2+\sqrt{3}}=$

$=20+20\sqrt{3}+20-20\sqrt{3}$

$f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)=40$

Dessa forma, conclui-se que $f\left(\log_{10}\left(2+\sqrt{3}\right)\right)$ é um número inteiro.

b] $f(x)=10\cdot10^x+\frac{10}{10^x}$, se $f(x)=52$

$10\cdot10^x+\frac{10}{10^x}=52$

Substituindo 10^x por y, temos:

$10\cdot y+\frac{10}{y}=52\Rightarrow 10y^2-52y+10=0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y'=5$ ou $y''=\frac{1}{5}$.

Para $y'=5$, tem-se:

$10^x=5\Rightarrow x=\log 5\Rightarrow x=\log\left(\frac{10}{2}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\log 10-\log 2\Rightarrow x=0{,}7$

Para $y''=\frac{1}{5}$, temos:

$10^x=\frac{1}{5}\Rightarrow x=\log\left(\frac{1}{5}\right)\Rightarrow x=\log\left(\frac{2}{10}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\log 2-\log 10\Rightarrow x=-0{,}7$

$S=\{-0{,}7;\ 0{,}7\}$

31. Pelas informações, tem-se que $h(2)=10$. Substituindo esses valores na função h, obtém-se a equação $10=50\cdot(1-10^{-2k})$. Resolvendo essa equação exponencial, encontra-se $k=-\frac{1}{2}\cdot\log\left(\frac{4}{5}\right)$.

Os eucaliptos serão cortados quando estiverem com 8 anos. Logo, devemos calcular $h(8)$:

$h(8)=50\cdot\left[1-10^{-8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\log 10\left(\frac{4}{5}\right)}\right]$

$50\cdot\left[1-10^{\log 10\left(\frac{4}{5}\right)^4}\right]=50\cdot\left(1-\frac{256}{625}\right)=50\cdot\frac{369}{625}=29{,}52$

Portanto, 29,52 metros de altura.

32. Aplicando o $\log_7$ em ambos os membros da equação exponencial, obtém-se:

$7^x=4{,}2\Rightarrow x=\log_7 4{,}2\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{\log\frac{42}{10}}{\log 7}=\frac{(\log 6+\log 7)-\log 10}{\log 7}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\frac{0{,}7781+0{,}8451-1}{0{,}8451}=0{,}7374\simeq 0{,}74$

$S=\{0{,}74\}$

33. a] A condição de existência da equação é: $x>0$

$(\log_2 x)^2-9\log_8 x=4\Rightarrow(\log_2 x)^2-3\log_2 x-4=0$

Fazendo $\log_2 x=y$:

$y^2-3y-4=0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y'=4$ ou $y''=-1$.

Substituindo:

$y=4\Rightarrow\log_2 x=4\Rightarrow x=16$

$y=-1\Rightarrow\log_2 x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{1}{2},16\right\}$

b] A condição de existência da equação é: $x>0$

$(\log_2 x)^2+4\cdot\log_2 x-32=0$

Fazendo $\log_2 x=y$:

$y^2+4y-32=0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $y'=4$ ou $y''=-8$.

Substituindo:

$y=4\Rightarrow\log_2 x=4\Rightarrow x=16$

$y=-8\Rightarrow\log_2 x=-8\Rightarrow x=\frac{1}{256}$

$S=\left\{\frac{1}{256},16\right\}$

34. Considerando os dados fornecidos e tirando o logaritmo de ambos os lados da equação, obtém-se:

$36^x=24\Rightarrow\log 36^x=\log 24\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x\cdot\log 6=3\log 2+\log 3\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x(\log 2+\log 3)=3\log 2+\log 3\Rightarrow$

$\Rightarrow 2x(0{,}78)=1{,}38\Rightarrow x=\frac{1{,}38}{1{,}56}=\frac{23}{26}$

35. Considerando os dados fornecidos no enunciado, tem-se:

$v_{máx}=3\,400\cdot\log_2(x+1)\Rightarrow 27\,200=3\,400\cdot\log_2(x+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow\log_2(x+1)=8\Rightarrow x+1=2^8\Rightarrow x=255$

36. $N=3N_0\Rightarrow 3N_0=N_0\cdot e^{0{,}05t}\Rightarrow e^{0{,}05t}=3\Rightarrow\ln e^{0{,}05t}=\ln 3\Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}05t=1{,}099\Rightarrow t=21{,}98$

O tempo será 21,98 minutos.

37. a] Resposta pessoal. Sugestão de situação-problema: Um determinado bem deprecia 10% ao ano. Considerando essa informação, depois de quanto tempo o valor atualizado desse bem será a metade do valor de compra?

Considerando $2V=V_0$, tem-se:

$V=V_0\cdot(1-i)^t\Rightarrow V_0=2V_0\cdot(1-0{,}1)^t\Rightarrow 1=2(0{,}9)^t\Rightarrow$

$\Rightarrow\log 1=\log 2(0{,}9)^t\Rightarrow 0=\log 2+\log(0{,}9)^t\Rightarrow$

$\Rightarrow-\log 2=\log(0{,}9)^t\Rightarrow t=\frac{-\log 2}{\log 0{,}9}\simeq 6{,}6$

Aproximadamente 6,6 anos.

38. Resposta pessoal. Sugestão de situação-problema: Em 2020, o México, mais precisamente o estado de Oaxaca, um dos mais pobres do país, foi atingido por um terremoto de magnitude 7,5, deixando rastros de destruição, pessoas e animais feridos e alguns mortos. Considerando a magnitude do terremoto, calcule a energia liberada.

Sabendo-se que $E_0=10^{-3}$ kW/h e a magnitude foi de 7,5, para obter a energia liberada E, pode-se utilizar a fórmula $I=\frac{2}{3}\cdot\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$. Portanto:

$I=\frac{2}{3}\cdot\log\left(\frac{E}{E_0}\right)\Rightarrow 7{,}5=\frac{2}{3}\cdot\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{22{,}5}{2}=\log\left(\frac{E}{10^{-3}}\right)$

Logo: $10^{\frac{22{,}5}{2}}=\frac{E}{10^{-3}}\Rightarrow E=10^{\frac{45}{4}-3}\simeq 10^9$

Portanto, a energia liberada pelo terremoto de magnitude 7,5 foi de, aproximadamente, 10^9 kW/h.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

39. a) Considerando a fórmula fornecida pelo enunciado e a aproximação para log 2, obtém-se:

$pH = -\log [H^+] \Rightarrow pH = -\log [6{,}4 \cdot 10^{-7}] \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -\log [64 \cdot 10^{-8}] \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -(\log 64 + \log 10^{-8}) \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -(6\log 2 - 8\log 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow pH \simeq -(6 \cdot 0{,}3 - 8) \Rightarrow pH \simeq 6{,}2$

b) Como o pH é 6,2, conclui-se que a solução é ácida.

40. Considerando x como o ano em que o Brasil atingirá 64% de seu potencial, tem-se:

$10 \cdot 2^{\frac{x-2016}{3}} = \frac{64}{100} \cdot 500 \Rightarrow 2^{\frac{x-2016}{3}} = 32 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{x-2016}{3} = 5 \Rightarrow x = 2031$

Considerando y como o ano em que o Brasil atingirá 100% de seu potencial, tem-se:

$10 \cdot 2^{\frac{x-2016}{3}} = 500 \Rightarrow 2^{\frac{y-2016}{3}} = 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y-2016}{3} \cdot \log 2 = \log 50 \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y-2016}{3} = \frac{\log 100 - \log 2}{\log 2} \Rightarrow y = 2033$

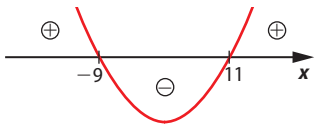
Brasil atingirá 64% em 2031 e 100% em 2033.

41. a) [I] A condição de existência é $a^2 - 2a + 1 > 0$. Resolvendo a inequação, obtém-se a raiz $a' = a'' = 1$. Portanto, $\{a \in \mathbb{R} \mid a \neq 1\}$.

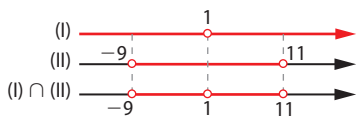
[II] Como a base é 10, aplicando a definição dos logaritmos, obtém-se:

$a^2 - 2a + 1 < 100 \Rightarrow a^2 - 2a - 99 < 0$

Resolvendo a inequação do 2º grau, obtêm-se as raízes $a' = -9$ ou $a'' = 11$.

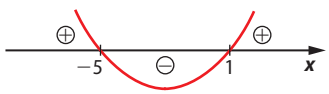


Calculando a intersecção entre (I) e (II), obtém-se:



$S = \{a \in \mathbb{R} \mid -9 < a < \mid 11 \text{ e } a \neq 1\}$

b) [I] A condição de existência é $x^2 + 4x - 5 > 0$. Resolvendo a inequação, obtêm-se as raízes $x' = 1$ ou $x'' = -5$.



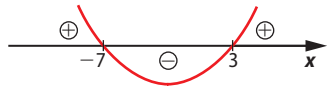
Portanto, $x < -5$ ou $x > 1$.

[II] Como a base é $\frac{1}{2}$, aplicando a propriedade dos logaritmos, obtém-se:

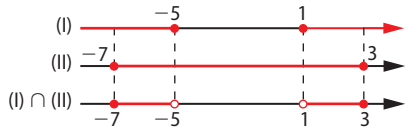
$x^2 + 4x - 5 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \Rightarrow x^2 + 4x - 5 \leqslant 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 21 \leqslant 0$

Resolvendo a inequação do 2º grau, obtêm-se $x' = 3$ ou $x'' = -7$.



Calculando a intersecção entre (I) e (II), obtém-se:



$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x < -5 \text{ ou } 1 < x \leqslant 3\}$

GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

42. Considerando as informações do enunciado, tem-se:

$\frac{Q_0}{4} < Q_0(0{,}64)^t < \frac{Q_0}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < (0{,}64)^t < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \log\left(\frac{1}{4}\right) < \log(0{,}64)^t < \log\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\log 2 < t \log\left(\frac{64}{100}\right) < -\log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -2\log 2 < t(6\log 2 - 2) < -\log 2$

Considerando as aproximações obtidas em uma calculadora científica, obtém-se:

$-2\log 2 < t(6\log 2 - 2) < -\log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}602 < -0{,}194t < -0{,}301 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}301 < 0{,}194t < 0{,}602 \Rightarrow 1{,}55 < t < 3{,}1$

Atividades complementares

1. Deve-se considerar que a intensidade I é 32% da intensidade inicial I_0, ou seja:

$I = \frac{32}{100} \cdot I_0 \Rightarrow I = \frac{8}{25} \cdot I_0$.

Portanto:

$I = I_0 \cdot 0{,}8^{\frac{h}{40}} \Rightarrow \frac{8}{25} \not{I_0} = \not{I_0} \cdot \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow \frac{8}{25} = \left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}}$

Aplicando o logaritmo, obtém-se:

$\log \frac{8}{25} = \log\left(\frac{8}{10}\right)^{\frac{h}{40}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 8 - \log 25 = \frac{h}{40} \cdot (\log 8 - \log 10) \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 \cdot \log 2 - 2 \cdot \log 5 = \frac{h}{40} \cdot (3 \cdot \log 2 - 1)$

Substituindo o log 2 e log 5 pelas respectivas aproximações, obtém-se:

$3(0{,}3) - 2 \cdot (0{,}7) = \frac{h}{40} \cdot (3 \cdot 0{,}3 - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}9 - 1{,}4 = \frac{h}{40} \cdot (0{,}9 - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow -0{,}5 = \frac{h}{40} \cdot (-0{,}1) \Rightarrow \frac{5}{\not{10}} = \frac{h}{40} \cdot \frac{1}{\not{10}} \Rightarrow h = 200$

A profundidade será de 200 cm ou 2 m.

Resposta: alternativa **c**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

2. Aplicando as propriedades dos logaritmos, obtém-se:

$2\log_9 x + \log_3 6 - 6\log_9 \sqrt{y} =$

$= \log_9 x^2 + \log_9 36 - \log_9 y^3 = \log_9 \frac{36x^2}{y^3}$

Resposta: alternativa **a**

3. Aplicando as propriedades dos logaritmos, obtém-se:

$\log_5 18 = \frac{\log 18}{\log 5} = \frac{\log 9 + \log 2}{\log 10 - \log 2} = \frac{2\log 3 + \log 2}{1 - \log 2} = \frac{2y + x}{1 - x}$

Resposta: alternativa **a**

4. Sabe-se que $pH = -\log[H^+]$ e $[H^+] = 5{,}4 \cdot 10^{-8}$ mol/L. Então, aplicando as propriedades dos logaritmos, conclui-se que:

$pH = -\log[5{,}4 \cdot 10^{-8}] = -\log(5{,}4) - \log(10^{-8}) =$

$= -\log(54) + \log 10 + 8 = -\log(3^3 \cdot 2) + 1 + 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = -3\log 3 - \log 2 + 9$

Substituindo as aproximações de log 2 e log 3, obtém-se:

$pH = -3\log 3 - \log 2 + 9 = -3(0{,}48) - (0{,}3) + 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow pH = 7{,}26$

Resposta: alternativa **a**

5. De acordo com a expressão fornecida pelo enunciado, ao considerar $t = 8$, obtém-se:

$P(8) = 10^5 \cdot \log_3 (8 + 1) = 10^5 \cdot \log_3 9 \Rightarrow P(8) = 10^5 \cdot 2$

$P(8) = 200\,000$ carros

Resposta: alternativa **a**

6. Determinando a condição de existência da função $f(x) = \log_{x-1}(x^2 + 1)$, obtém-se:

$x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1$

$x - 1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2$

Como $x^2 + 1 > 0$ para qualquer valor real de x, conclui-se que as condições de existência, ou domínio, de f são $x > 1$ e $x \neq 2$.

Resposta: alternativa **e**

7. Considerando que a abertura máxima é 1,4, tem-se:

$S = \log_2 f^2 \Rightarrow S = \log_2 (1{,}4)^2$

Aplicando algumas propriedades dos logaritmos, obtém-se:

$S = \log_2 (1{,}4)^2 \Rightarrow S = \frac{2\log 1{,}4}{\log 2} \Rightarrow S = \frac{2(\log 14 - \log 10)}{\log 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow S = \frac{2(\log 2 + \log 7 - \log 10)}{\log 2}$

Substituindo log 2 e log 7 pelas aproximações fornecidas no enunciado, obtém-se:

$S = \frac{2(0{,}301 + 0{,}845 - 1)}{0{,}301} \Rightarrow S = 0{,}97$

Resposta: alternativa **d**

8. Antes de calcular a área do triângulo deve-se, primeiro, determinar o valor das ordenadas dos pontos C e B. Assim:

$y_C = \log_3 3 = 1$

$y_B = \log_3 27 = \log_3 3^3 = 3$

Portanto, a área do triângulo ABC é dada por:

$A = \frac{(3-1)\cdot(27-3)}{2} = \frac{2 \cdot 24}{2} = 24$

Resposta: alternativa **b**

9. Como se trata de uma equação produto com três fatores, então, para encontrar as raízes, basta igualar cada um desses fatores a zero. Logo:

$x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$2^{x^2 - 9} = 0 \Rightarrow \nexists\, x \in \mathbb{R}$

Aplicando a definição em $\log |x^2 + x - 1| = 0$, obtém-se:

$|x^2 + x - 1| = 10^0 \Rightarrow |x^2 + x - 1| = 1$

Daí, vem:

$x^2 + x - 1 = -1 \Rightarrow x^2 + x = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 0$ e $x'' = -1$.

$x^2 + x - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 1$ e $x'' = -2$.

Logo, as raízes são: -3, -2, -1, 0 e 1, ou seja, cinco raízes reais distintas.

Resposta: alternativa **e**

10. Aplicando as propriedades dos logaritmos na equação $\log_3 (x + 2) - \log_{\frac{1}{3}} (x - 6) = \log_3 (2x - 5)$, obtém-se:

$\log_3 (x + 2) + \log_3 (x - 6) = \log_3 (2x - 5) \Rightarrow \log_3 (x + 2) \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 (x + 2)(x - 6) = \log_3 (2x - 5)$

Portanto:

$(x + 2)(x - 6) = 2x - 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 2x - 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 6x - 7 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 7$ e $x'' = -1$.

Como a nota do exame é de 0 a 10, a nota de Alice é 7.

Resposta: alternativa **a**

11. Para calcular o tempo necessário para que a concentração chegue a 50 g/L, deve-se considerar $Q(t) = 50$. Logo:

$Q(t) = 100 \cdot 5^{-0{,}3t} \Rightarrow 50 = 100 \cdot 5^{-0{,}3t} \Rightarrow 2^{-1} = 5^{-0{,}3t} \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2^{-1} = \log 5^{-0{,}3t}$

Aplicando algumas propriedades dos logaritmos, tem-se:

$\log 2^{-1} = \log 5^{-0{,}3t} \Rightarrow -\log 2 = -0{,}3t \cdot \log 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}3t = \frac{\log 2}{\log 5} \Rightarrow 0{,}3t = \frac{\log 10 - \log 5}{\log 5}$

Substituindo log 5 pela aproximação fornecida no enunciado, obtém-se:

$0{,}3t = \frac{1 - 0{,}7}{0{,}7} \Rightarrow t = \frac{3}{7} \cdot \frac{10}{3} \simeq 1{,}46$

Ou seja, aproximadamente 1 hora e meia.

Resposta: alternativa **d**

12. Para calcular o tempo necessário para que 2 500 pessoas sejam atingidas por uma epidemia, deve-se considerar que $N(t) = 2\,500$. Logo:

$N(t) = \frac{10\,000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow 2\,500 = \frac{10\,000}{1 + 8 \cdot 4^{-2t}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 + 8 \cdot 4^{-2t} = 4 \Rightarrow 2^{3-4t} = 3 \Rightarrow \log 2^{3-4t} = \log 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3 - 4t = \frac{\log 3}{\log 2} \Rightarrow -4t = -1{,}4 \Rightarrow t = 0{,}35$

Como a unidade de t é em mês, 0,35 equivale a aproximadamente dez dias.

Resposta: alternativa **a**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

13. Segundo o enunciado, podemos concluir que a cada cm^2 de um processador, em 1986, continha 400 000 transistores, pois em 0,25 cm^2 havia 100 000 transistores. Assim, pode-se escrever que:

$400000 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = 100 \cdot 10^9 \Rightarrow 4 \cdot 2^{\frac{t}{2}} = 10^6 \Rightarrow 2^{\frac{t}{2}+2} = 10^6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 2^{\frac{t}{2}+2} = \log 10^6 \Rightarrow \left(\frac{t}{2}+2\right) \cdot 0{,}3 = 6 \Rightarrow \frac{t}{2} = 18 \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 36$

Assim, 36 anos a partir de 1986, ou seja, 2022 será o ano em que a densidade de transistores em um processador, por cm^2, será de 100 bilhões.

Resposta: alternativa **c**

14. Considerando a definição de módulo, conclui-se que:

$|\log_3(3x)| \leqslant 1 \Rightarrow -1 \leqslant \log_3(3x) \leqslant 1$

Aplicando a definição dos logaritmos, obtém-se:

$-1 \leqslant \log_3(3x) \leqslant 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leqslant 3x \leqslant 3 \Rightarrow \frac{1}{9} \leqslant x \leqslant 1$

Logo, $S = \left[\frac{1}{9}, 1\right]$.

Resposta: alternativa **c**

15. As condições de existência do logaritmo são $x > 0$, $x \neq 1$ e $x + 6 > 0$. Assim, pode-se considerar que x deve ser um valor positivo, porém diferente de 1.

Aplicando a definição de logaritmos, obtém-se:

$\log_x(x + 6) = 2 \Rightarrow x + 6 = x^2 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 3$ ou $x'' = -2$.

Como, pela condição de existência, $x > 0$, deve-se desconsiderar a solução -2. Portanto, a solução é $x = 3$, ou seja, um número primo.

Resposta: alternativa **a**

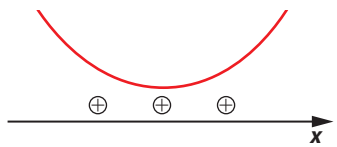
16. Para que a função $f(x) = \log_{10}\left(\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1)\right)$ seja definida, deve-se considerar:

$x^2 - x + 1 > 0$ (I)

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > 0$ (II)

(I) $x^2 - x + 1 > 0$

Como o discriminante é negativo ($\Delta = 1 - 4 = -3$), pode-se considerar que sempre assumirá um valor positivo, pois $a > 0$.

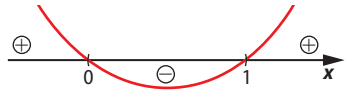


(II) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > 0$

Aplicando a definição dos logaritmos, obtém-se:

$\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - x + 1) > \log_{\frac{1}{3}} 1 \Rightarrow x^2 - x + 1 < 1 \Rightarrow x^2 - x < 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $x' = 0$ e $x'' = 1$.



De (I) ∩ (II), obtém-se $0 < x < 1$.

Assim, $D(f) = \{x \in \mathbb{R}; 0 < x < 1\}$.

Resposta: alternativa **a**

GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

17. Considerando o enunciado, é necessário que $P < 0{,}75V$, logo:

$P < 0{,}75P(1 + i)^n \Rightarrow 1 < 0{,}75(1 + 0{,}032)^n \Rightarrow \frac{4}{3} < 1{,}0132^n$

Como a aproximação fornecida está na base e, deve-se aplicar o ln em ambos os membros da inequação, assim:

$\ln\left(\frac{4}{3}\right) < \ln(1{,}0132^n) \Rightarrow n \cdot 0{,}131 > 0{,}2877 \Rightarrow n > 21{,}96$

Como n é um número natural, pois representa uma parcela, pode-se considerar $n = 22$.

Assim, a parcela a ser paga com a 32ª parcela será a 52ª parcela (30 + 22 = 52).

Resposta: alternativa **c**

18. Para calcular o número de parcelas cujo valor não comprometa o orçamento da pessoa, deve-se considerar $P \geqslant 400$. Logo:

$P = \frac{5\,000 \cdot 1{,}013^n \cdot 0{,}013}{(1{,}013^n - 1)} \Rightarrow \frac{65 \cdot 1{,}013^n}{(1{,}013^n - 1)} \leqslant 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow 65 \cdot 1{,}013^n \leqslant 400(1{,}013^n - 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow 65 \cdot 1{,}013^n \leqslant 400 \cdot 1{,}013^n - 400 \Rightarrow$

$\Rightarrow 335 \cdot 1{,}013^n \geqslant 400 \Rightarrow 1{,}013^n \geqslant \frac{400}{335}$

Aplicando o log em ambos os membros da inequação, obtém-se:

$\log(1{,}013^n) \geqslant \log\left(\frac{400}{335}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow n \log 1{,}013 \geqslant \log 400 - \log 335 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}005n \geqslant 2{,}602 - 2{,}525 \Rightarrow n \geqslant \frac{0{,}077}{0{,}005} \Rightarrow n \geqslant 15{,}4$

Assim, o menor número de parcelas será 16.

Resposta: alternativa **d**

19. Considerando a intensidade do ronco mais alto, tem-se:

$93 = 120 + 10 \cdot \log I \Rightarrow -2{,}7 = \log I \Rightarrow I = 10^{-2{,}7}$

Considerando a intensidade do ronco moderado, tem-se:

$50 = 120 + 10 \cdot \log I \Rightarrow -7 = \log I \Rightarrow I = 10^{-7}$

Assim, a razão entre as duas intensidades é:

$\frac{10^{-2{,}7}}{10^{-7}} = 10^{-2{,}7-(-7)} = 10^{4{,}3}$

Ou seja, um número entre 10 000 e 100 000.

Resposta: alternativa **d**

Atividades

1. Para representar as sequências, vamos considerar os quatro primeiros termos, ou seja, aqueles cujos índices são 1, 2, 3 e 4.

a) $a_n = 3n - 1$
$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$; $a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$;
$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$; $a_4 = 3 \cdot 4 - 1 = 11$
(2, 5, 8, 11, ...)

b) $a_n = 2^{n-1}$
$a_1 = 2^{1-1} = 1$; $a_2 = 2^{2-1} = 2$;
$a_3 = 2^{3-1} = 4$; $a_4 = 2^{4-1} = 8$
(1, 2, 4, 8, ...)

c) $a_n = 1 + (-1)^n$
$a_1 = 1 + (-1)^1 = 0$; $a_2 = 1 + (-1)^2 = 2$;
$a_3 = 1 + (-1)^3 = 0$; $a_4 = 1 + (-1)^4 = 2$
(0, 2, 0, 2, ...)

d) $a_n = n^2 - 1$
$a_1 = 1^2 - 1 = 0$; $a_2 = 2^2 - 1 = 3$;
$a_3 = 3^2 - 1 = 8$; $a_4 = 4^2 - 1 = 15$
(0, 3, 8, 15, ...)

2. a) Calcular o quinto e o oitavo termos de uma sequência equivale considerar $n = 5$ e $n = 8$, respectivamente. Logo:
$a_5 = 3 \cdot 5 + 1 \Rightarrow a_5 = 16$
$a_8 = 3 \cdot 8 + 1 \Rightarrow a_8 = 25$

b) Para determinar a posição de um termo, no caso, 49, deve-se considerar $a_n = 49$ e, em seguida, calcular o valor de n. Logo:
$49 = 3n + 1 \Rightarrow n = 16$
Portanto, 49 é o 16º termo dessa sequência.

c) Considerando $a_n = 1\,001$, para que esse termo pertença a essa sequência, deve-se ter, necessariamente, um valor de n natural. Assim:
$1\,001 = 3n + 1 \Rightarrow n = \frac{1\,000}{3}$
Como $n \notin \mathbb{N}^*$, conclui-se que 1 001 não é um termo dessa sequência.

3. a) Considerando $n = 100$, obtém-se:
$f(100) = 2 \cdot (100) - 1 = 199$

b) Considerando $a_n = 99$, obtém-se:
$99 = 2n - 1 \Rightarrow n = 50$

c) Calculando cada termo da sequência, conforme o enunciado, obtêm-se:
$f(1) + f(7) = 2 \cdot 1 - 1 + 2 \cdot 7 - 1 = 1 + 13 = 14$
$f(2) + f(6) = 2 \cdot 2 - 1 + 2 \cdot 6 - 1 = 3 + 11 = 14$
$f(3) + f(5) = 2 \cdot 3 - 1 + 2 \cdot 5 - 1 = 5 + 9 = 14$
Portanto, conclui-se que a soma é sempre igual a 14.

4. a) Se $a_1 = 3$ e $a_{n+1} = 2a_n - 5$, então:
$a_2 = 2a_1 - 5 = 2 \cdot 3 - 5 = 1$
$a_3 = 2a_2 - 5 = 2 \cdot 1 - 5 = -3$
$a_4 = 2a_3 - 5 = 2 \cdot (-3) - 5 = -11$
(3, 1, −3, −11, ...)

b) Se $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = (a_n)^2$, então:
$a_2 = (a_1)^2 = (2)^2 = 4$
$a_3 = (a_2)^2 = (4)^2 = 16$
$a_4 = (a_3)^2 = (16)^2 = 256$
(2, 4, 16, 256, ...)

c) Se $a_1 = 2$ e $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$, então:
$a_2 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{2}$
$a_3 = \frac{1}{a_2} = 2$
$a_4 = \frac{1}{a_3} = \frac{1}{2}$
$\left(2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, \ldots\right)$

d) Se $a_1 = 0$ e $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 1}$, então:
$a_2 = \sqrt{a_1 + 1} = 1$
$a_3 = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
$a_4 = \sqrt{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{\sqrt{2} + 1}$
$\left(0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{\sqrt{2} + 1}, \ldots\right)$

5. a) Ao observar a sequência das macieiras, pode-se escrever $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, $a_3 = 9$ e $a_4 = 16$. Portanto, o termo geral é $a_n = n^2$.
De forma análoga, ao analisar a sequência dos pinheiros, tem-se $a_1 = 8$, $a_2 = 16$, $a_3 = 24$ e $a_4 = 32$. Portanto, o termo geral é $a_n = 8n$.

b) O número de macieiras será maior do que o número de pinheiros quando:
$n^2 > 8n \Rightarrow n^2 - 8n > 0$
Resolvendo a inequação, obtém-se $n > 8$, ou seja, a partir de $n = 9$.

6. Há várias maneiras de identificar se uma sequência é uma PA. Por exemplo, por meio de um termo central qualquer, que é dado pela média aritmética entre dois termos, o antecessor e o sucessor a ele. Logo:

a) Considere 5 o termo central, portanto 25 e 1 serão os outros dois termos. Então:
$5 \neq \frac{25 + 1}{2}$ e, portanto, a sequência não é uma PA.

b) Considere −17 o termo central, portanto −17 e −17 serão os outros dois termos. Então:
$-17 = \frac{-17 - 17}{2}$ e, portanto, a sequência é uma PA.
A razão é 0.

c) Considere 30 o termo central, portanto 36 e 24 serão os outros dois termos. Então:
$30 = \frac{36 + 24}{2}$ e, portanto, a sequência é uma PA.
A razão é −6 (30 − 36 = −6).

d) Considere 16 o termo central, portanto 13 e 20 serão os outros dois termos. Então:
$16 \neq \frac{13 + 20}{2}$ e, portanto, a sequência não é uma PA.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

e) Considere 16 o termo central, portanto 9 e 23 serão os outros dois termos. Então:
$16 = \frac{9 + 23}{2}$ e, portanto, a sequência é uma PA.
A razão é 7 (23 − 16 = 7).

7. a) Como o primeiro termo é 10 e a razão é 3, então: (10, 13, 16, 19, 22)
b) Como o primeiro termo é −3 e a razão é 5, então: (−3, 2, 7, 12, 17, 22)
c) Como o primeiro termo é $a + 2$ e a razão é a, então: $(a + 2, 2a + 2, 3a + 2, 4a + 2)$

8. A razão de uma PA pode ser obtida pela diferença, a partir do segundo termo, entre um termo qualquer e seu antecessor imediato.
a) $r = a_2 - a_1 = -8 - (-11) = 3$
b) $r = 0{,}875 - 1 = -0{,}125$
c) $r = a_2 - a_1 = \sqrt{2} + \sqrt{1} - \sqrt{2} = 1$

9. Uma sequência será uma PA quando a razão da progressão for constante.
a) $a_n = 3n - 1$
$a_1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2$
$a_2 = 3 \cdot 2 - 1 = 5$
$a_3 = 3 \cdot 3 - 1 = 8$
É uma PA de razão 3.
b) $a_n = n^2$
$a_1 = 1^2 = 1$
$a_2 = 2^2 = 4$
$a_3 = 3^2 = 9$
Não é uma PA, pois a razão entre os termos não é constante.

10. Considerando os dados fornecidos no enunciado, tem-se:
$a_3 - a_1 = 10$ (I)
Pela definição de PA, temos:
$a_3 = 10 + r$ (II)
$a_1 = 10 - r$ (III)
Substituindo (II) e (III) em (I), obtém-se:
$a_3 - a_1 = 10 \Rightarrow 10 + r - (10 - r) = 10 \Rightarrow$
$\Rightarrow 10 + r - 10 + r = 10 \Rightarrow 2r = 10 \Rightarrow r = 5$
Logo, a PA é (5, 10, 15).

11. Considerando a definição de PA, obtêm-se:
a) Como a razão é 9: $x = 12 + 9 \Rightarrow x = 21$
b) Como a razão é 7: $y - 7 = 8 \Rightarrow y = 15$
c) $x - 56 = 70 - x \Rightarrow 2x = 126 \Rightarrow x = 63$
d) $y - 4{,}5 = 9{,}5 - y \Rightarrow 2y = 14 \Rightarrow y = 7$

12. a) Segundo o enunciado, pode-se considerar que $x_n = y_{n+1} - y_n$. Além disso, sabe-se que $y_1 = 1$ e $y_2 = 2$. Portanto, para:
$n = 1$: $x_1 = y_2 - y_1 = 2 - 1 \Rightarrow x_1 = 1$
Com a sequência $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é uma PA de razão $r = 3$. Obtêm-se:
$x_2 = x_1 + r \Rightarrow x_2 = 1 + 3 = 4$
$x_3 = x_2 + r \Rightarrow x_3 = 4 + 3 = 7$
$x_4 = x_3 + r \Rightarrow x_4 = 7 + 3 = 10$
Os quatro primeiros termos de (x_n) são 1, 4, 7 e 10.

b) Como $x_n = y_{n+1} - y_n$, então $y_{n+1} = y_n + x_n$. Logo:
$y_3 = y_2 + x_2 \Rightarrow y_3 = 2 + 4 = 6$
$y_4 = y_3 + x_3 \Rightarrow y_4 = 6 + 7 = 13$
Os quatro primeiros termos de (y_n) são 1, 2, 6 e 13.

13. Para calcular o vigésimo termo de uma PA, é necessário ter o valor da razão e do primeiro termo. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = -8$. Assim, para obter a razão, deve-se:
$r = -3 - (-8) = 5$
Utilizando o termo geral de uma PA, obtém-se:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{20} = -8 + 19 \cdot 5 = 87$

14. Como o enunciado fornece os valores da razão da progressão e, também, do primeiro termo da PA, pode-se utilizar o termo geral para calcular a posição do termo igual a 44. Sendo assim:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow 44 = 4 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow n = 9$
Portanto, o 9º termo é igual a 44.

15. Para determinar o termo geral de uma PA, é necessário conhecer o primeiro termo e a razão. Como o enunciado forneceu os dois primeiros termos da PA, pode-se concluir que:
$r = 7 - (2) = 5$
Como $a_1 = 2$, obtém-se:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_n = 2 + (n - 1) \cdot 5 \Rightarrow a_n = 5n - 3$

16. Os números ímpares são (1, 3, 5, ...), portanto, $a_1 = 1$ e $r = 2$. Assim, o 60º número ímpar será o termo a_{60}. Logo:
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{60} = 1 + (60 - 1)2 \Rightarrow a_{60} = 119$

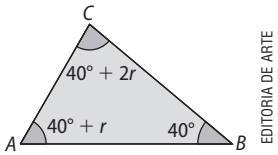
17. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_1 = 5$ e $r = 5$, pois $r = 10 - 5 = 5$. Como $a_n = 785$, pode-se utilizar o termo geral da PA para calcular o valor de n, que, nesse caso, equivale à quantidade de termos da PA. Portanto:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 785 = 5 + (n - 1)5 \Rightarrow 5n = 785 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 157$

18. Para determinar um termo qualquer de uma PA, é necessário saber o primeiro termo dessa PA e a respectiva razão para, então, utilizar o termo geral. Assim, em cada item, deve-se elaborar o termo geral e, em seguida, o termo específico de cada caso. Sendo assim:
a) $a_1 = 6{,}5$ e $r = 7{,}0 - 6{,}5 = 0{,}5$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{15} = 6{,}5 + (15 - 1)0{,}5 \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{15} = 13{,}5$
b) $a_1 = 3 + \sqrt{5}$ e $r = 4 - \left(3 + \sqrt{5}\right) = 1 - \sqrt{5}$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{20} = 3 + \sqrt{5} + (20 - 1)\left(1 - \sqrt{5}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{20} = 22 - 18\sqrt{5}$
c) $a_1 = 1 + \pi$ e $r = -1 + 2\pi - (1 + \pi) = -2 + \pi$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_{10} = 1 + \pi + (10 - 1)(-2 + \pi) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_{10} = -17 + 10\pi$

- Uma resposta possível seria utilizar, por exemplo, $a_1 = \frac{1}{3}$ e $a_2 = \frac{8}{9}$ e pedir o cálculo de a_5. Assim:
$a_1 = \frac{1}{3}$ e $r = \frac{8}{9} - \frac{1}{3} = \frac{5}{9}$
$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot r \Rightarrow a_5 = \frac{1}{3} + (5 - 1) \cdot \frac{5}{9} \Rightarrow a_5 = \frac{23}{9}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

19. Construindo um esboço que representa a situação do enunciado, tem-se:



EDITORIA DE ARTE

Portanto:

$40° + 40° + r + 40° + 2r = 180° \Rightarrow r = 20°$

Logo, cada ângulo mede:

$\hat{A} = 40° + 20° = 60°$

$\hat{C} = 40° + 40° = 80°$

20. Considerando os dados fornecidos pelo enunciado, sabe-se que $a_8 = 16$ e $a_{10} = 20$. Sendo assim, utilizando a definição de PA, obtém-se o sistema:

$$\begin{cases} 16 = a_1 + 7r \\ 20 = a_1 + 9r \end{cases}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtém-se $r = 2$. Substituindo esse resultado em qualquer uma das equações, então, $a_1 = 2$.

Portanto, $a_1 = 2$ e $r = 2$.

21. Considerando as informações do sistema, pode-se reescrevê-lo a partir da definição de PA.

$$\begin{cases} a_1 + 3a_2 = 5 \Rightarrow a_1 + 3 \cdot (a_1 + r) = 5 \\ 4a_3 - 2a_6 = -8 \Rightarrow 4 \cdot (a_1 + 2r) - 2(a_1 + 5r) = -8 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} 4a_1 + 3r = 5 \\ 2a_1 - 2r = -8 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se $r = 3$ e $a_1 = -1$.

Portanto, a PA é dada por $(-1, 2, 5, ...)$.

22. De acordo com as informações do enunciado, obtém-se o sistema a seguir:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 27 \Rightarrow a_1 + (a_1 + 2r) + (a_1 + 4r) = 27 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 36 \Rightarrow a_1 + r + (a_1 + 3r) + (a_1 + 5r) = 36 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} 3a_1 + 6r = 27 \\ 3a_1 + 9r = 36 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtêm-se $r = 3$ e $a_1 = 3$.

Portanto, a PA é dada por (3, 6, 9, 12, 15, 18).

23. A atividade trata de uma PA composta por 5 termos. Sendo assim, consideram-se os termos como $a_1 = x - 2r$, $a_2 = x - r$, $a_3 = x$, $a_4 = x + r$ e $a_5 = x + 2r$ para auxiliar os cálculos.

De acordo com as informações do enunciado, obtém-se o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a_1 \cdot a_5 = 28 \Rightarrow (x - 2r) \cdot (x + 2r) = 28 \\ a_2 + a_3 + a_4 + 24 \Rightarrow (x - r) + r + (x + r) = 24 \end{cases}$$

Logo:

$$\begin{cases} x^2 = 28 + 4r^2 \text{ (I)} \\ x = 8 \text{ (II)} \end{cases}$$

Substituindo (II) em (I):

$64 = 28 + 4r^2 \Rightarrow 4(r^2 - 9) = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $r' = 3$ e $r'' = -3$. Como a razão é um número positivo, pois a PA é crescente, então, deve-se desconsiderar a raiz negativa.

Logo, os números que formam a PA são (2, 5, 8, 11, 14).

24. **a)** Considerando a PA descrita no enunciado, pode-se afirmar que $a_1 = 4$ e $r = 3$, pois $r = 7 - 4$. Sendo assim, o termo geral dessa PA é $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3$ ou simplesmente $a_n = 3n + 1$.

Portanto, pode-se considerar que a PA é uma função discreta cuja lei é $f(x) = 3x + 1$.

b) O domínio dessa função são os números naturais maiores do que zero ($\mathbb{N}^*$) e a imagem é a própria sequência da PA, ou seja, $\text{Im}(f) = \{4, 7, 10, 13, 16, ...\}$.

25. Pode-se organizar as informações do enunciado em um quadro, para ajudar a compreender a situação.

frequência	87,9	88,1	...	107,9
canal	200	201	...	x

Os números formam uma PA cujo primeiro termo é $a_1 = 87,9$ e o último $a_n = 107,9$. Além disso, sabe-se que $r = 0,2$.

a) Considerando a fórmula do termo geral, obtém-se:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 107,9 = 87,9 + (n - 1) \cdot 0,2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20 = (n - 1) \cdot 0,2 \Rightarrow 100 = n - 1 \Rightarrow n = 101$

Para calcular o número com maior frequência, deve-se considerar a PA cujo primeiro termo é $a_1 = 200$, $n = 101$ e $r = 1$.

$a_{101} = 200 + (101 - 1) \cdot 1 \Rightarrow a_{101} = 300$

b) Deve-se calcular na PA que representa a sequência de frequências, pois, como a_1 corresponde ao canal 200, o canal 285 será a_{86}.

$a_{86} = 87,9 + (86 - 1) \cdot 0,2 \Rightarrow a_{86} = 87,9 + 85 \cdot 0,2 = 104,9$

Então, a frequência é 104,9 MHz.

26. De acordo com a figura, é possível observar que:

$$\begin{cases} 1 \text{ triângulo}: 3 \text{ palitos} \\ 2 \text{ triângulos}: 5 \text{ palitos} \\ 3 \text{ triângulos}: 7 \text{ palitos} \\ \quad\quad\vdots \quad\quad\vdots \\ 100 \text{ triângulos}: a_{100} \end{cases}$$

Assim: $a_1 = 3$, $r = 2$ e $n = 100$

Então: $a_{100} = 3 + 99 \cdot 2 \Rightarrow a_{100} = 201$

Serão necessários 201 palitos para construir 100 triângulos.

27. Como a razão de uma PG é, a partir do segundo termo, o quociente entre cada termo e o respectivo antecessor, pode-se concluir que:

a) $q = \frac{12}{3} \Rightarrow q = 4$

b) $q = \frac{5}{10} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

c) $q = \frac{-15}{5} \Rightarrow q = -3$

d) $q = \frac{50}{10} \Rightarrow q = 5$

e) $q = \frac{5}{\sqrt{5}} \Rightarrow q = \sqrt{5}$

f) $q = \frac{2^5}{2} \Rightarrow q = 2^4$

g) $q = \frac{\frac{5}{2}}{5} \Rightarrow q = \frac{1}{2}$

h) $q = \frac{10}{10^{-1}} \Rightarrow q = 10^2$

28. Segundo os critérios de classificação de uma PG, pode-se afirmar que:

a) Constante, pois $q = 1$.

b) Decrescente, pois $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$.

c) Decrescente, pois $a_1 = -2$ e $q = 4$.

d) Oscilante, pois $a_1 = 3$ e $q = -2$.

e) Crescente, pois $a_1 = 4$ e $q = 2$.

f) Crescente, pois $a_1 = -7$ e $q = \frac{1}{4}$.

g) Crescente, pois $a_1 = \sqrt{3}$ e $q = \sqrt{3}$.

h) Decrescente, pois $a_1 = \sqrt{3}$ e $q = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

29. Para verificar se a sequência $a_n = 5 \cdot 4^{n-2}$ é uma PG, deve-se tentar identificar os termos a_1 e q. Para isso, deve-se utilizar as propriedades da potenciação. Assim:

$a_n = 5 \cdot 4^{n-2} \Rightarrow a_n = 5 \cdot \frac{4^n}{4^2} \Rightarrow a_n = \frac{5}{16} \cdot 4^n$

Portanto, a sequência é uma PG cujo primeiro termo é $a_1 = \frac{5}{16}$ e $q = 4$.

30. A sequência (a, b, c) é uma PA de razão $r = 5$. Então:

$\begin{cases} b = a + 5 \quad \text{(I)} \\ c = a + 10 \quad \text{(II)} \end{cases}$

A sequência $(a + 2, b, c - 1)$ é uma PG. Então:

$\frac{b}{1+2} = \frac{c-1}{b} \quad \text{(III)}$

Substituindo as expressões (I) e (II) na expressão (III), obtém-se:

$\frac{a+5}{a+2} = \frac{a+10-1}{a+5} \Rightarrow a = 7$

Substituindo o valor de a nas expressões (I) e (II), obtém-se:

$\begin{cases} b = 7 + 5 = 12 \\ c = a + 10 = 17 \end{cases}$

Logo, $a + b + c = 36$.

31. Como a sequência $(3, a, b)$ é uma PA crescente, pode-se afirmar que $3 < a < b$. Além disso: $a - 3 = b - a \Rightarrow$
$\Rightarrow b = 2a - 3$ (I)

Como a sequência $(a, b, 8)$ é uma PG, pode-se afirmar que:

$\frac{b}{a} = \frac{8}{b} \Rightarrow b^2 = 8a$ (II)

Substituindo (I) em (II):

$(2a - 3)^2 = 8a \Rightarrow 4a^2 - 20a + 9 = 0$

Resolvendo a equação do 2º grau, obtêm-se as raízes $a' = \frac{9}{2}$ e $a'' = \frac{1}{2}$.

Como $a > 3$, deve-se descartar a segunda raiz.

Logo, substituindo o valor de a em (I), obtém-se $b = 6$.

32. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_1 = 1$ e $q = 5$. Logo:

$a_{10} = 1 \cdot 5^9 \Rightarrow a_{10} = 5^9$

33. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{2}$. Então:

$a_6 = 512 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \Rightarrow a_6 = 16$

34. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_6 = 2$ e $q = \frac{1}{4}$. Assim:

$a_6 = a_1 \cdot q^5 \Rightarrow 2 = a_1 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \Rightarrow a_1 = 2\,048$

35. Pelo enunciado, têm-se $a_1 = \frac{1}{4}$ e $a_7 = 16$. Portanto:

$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 16 = \frac{1}{4} \cdot q^6 \Rightarrow q = \pm 2$

36. Pelo enunciado, têm-se $a_5 = 32$ e $a_8 = 256$. Dessa forma:

$\frac{a_8}{a_5} = \frac{a_1 \cdot q^7}{a_1 \cdot q^4} = \frac{256}{32} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow q = 2$

Com o valor de q, é possível calcular a_1. Assim:

$a_5 = 32 \Rightarrow a_1 \cdot 2^4 = 32 \Rightarrow a_1 = 2$

37. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = -2$. Logo:

$a_7 = \frac{1}{2} \cdot (-2)^6 \Rightarrow a_7 = 32$

38. Pelo enunciado, é possível identificar que $a_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $q = \sqrt{2}$. Então:

$a_{20} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{19} \Rightarrow a_{20} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^{20}}{2} = 512$

39. Com as informações fornecidas pelo enunciado, é possível elaborar o seguinte sistema:

$\begin{cases} a_2 - a_1 = 9 \\ a_5 - a_4 = 576 \end{cases}$

Aplicando a definição de PG, obtêm-se:

$\begin{cases} a_1 \cdot q - a_1 = 9 \\ a_1 \cdot q^4 - a_1 \cdot q^3 = 576 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 \cdot (q-1) = 9 \\ a_1 \cdot q^3 \cdot (q-1) = 576 \end{cases}$

Ao dividir a segunda equação pela primeira, obtém-se:

$\frac{a_1 \cdot q^3 \cdot (q-1)}{a_1 \cdot (q-1)} = \frac{576}{9} \Rightarrow q^3 = 64 \Rightarrow q = 4$

Como $a_1(q - 1) = 9$, então:

$3a_1 = 9 \Rightarrow a_1 = 3$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

40. Considerando $a_1 = 18$, então $a_4 = b$, pois foram inseridos dois termos entre eles. Como o enunciado afirma que a razão é 3, então:

$b = a_1 \cdot q^3 \Rightarrow b = 18 \cdot 3^3 \Rightarrow b = 486$

41. a] Chamando de A_0 a área inicialmente infestada, A_1 a área infestada após 1 ano, A_2, A_3, ..., A_n as áreas infestadas, respectivamente, após 2 anos, 3 anos, ..., n anos, e levando em conta uma taxa de aumento de área de 50% ao ano, obtém-se a sequência (8, 12, 18, 27, ...), que corresponde a uma PG de razão $q = 1{,}5$. Ao final do enésimo ano, a área infestada será:

$A_n = A_0 \cdot q^n \Rightarrow A_n = 8 \cdot (1{,}5)^n$

b] Para a vegetação tomar conta de toda a represa, deve-se ter:

$8 \cdot (1{,}5)^n = 128 \Rightarrow (1{,}5)^n = 16 \Rightarrow \log (1{,}5)^n = \log 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log (1{,}5)^n = \log 2^4 \Rightarrow n \cdot \log (1{,}5) = 4 \cdot \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot \log\left(\frac{3}{2}\right) = 4 \cdot \log 2 \Rightarrow n \cdot (\log 3 - \log 2) = 4 \cdot \log 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow n \cdot (0{,}48 - 0{,}30) = 4 \cdot 0{,}30 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0{,}18 \cdot n = 1{,}20 \Rightarrow n = \frac{1{,}20}{0{,}18} = 6{,}666...$

A vegetação tomaria conta de toda a represa em aproximadamente 7 anos.

42. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 1$ e $a_2 = 9$. Logo:

$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow q = \frac{9}{1} = 9$

Portanto:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 6\,561 = 1 \cdot 9^{n-1}$

$3^8 = 3^{2(n-1)} \Rightarrow 8 = 2n - 2 \Rightarrow n = 5$

43. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 5$ e $a_2 = 50$. Então:

$q = \frac{50}{5} = 10$

Assim:

$a_n = 500\,000 \Rightarrow a_n = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow 5 \cdot 10^{n-1} = 5 \cdot 10^5 \Rightarrow$

$\Rightarrow n - 1 = 5 \Rightarrow n = 6$

Portanto, a soma de todos os termos será:

$S_6 = \frac{5 \cdot (10^6 - 1)}{10 - 1} \Rightarrow S_6 = 555\,555$

44. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 3$ e $a_2 = 6$. Dessa forma, $q = \frac{6}{3} = 2$.

Como a soma de todos os termos é $S_n = 765$, então:

$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} \Rightarrow 765 = \frac{3 \cdot (2^n - 1)}{2 - 1} \Rightarrow n = 8$

45. A partir de Vênus, o planeta Júpiter é o quarto elemento da sequência. Assim:

$D_J = 0{,}3 \cdot 2^4 + 0{,}4 \Rightarrow D_J = 4{,}8 + 0{,}4 \Rightarrow D_J = 5{,}2$

A distância heliocêntrica do planeta Júpiter, segundo a lei de Titius-Bode, é 5,2 UA.

46. Ao analisar a quantidade de tábuas em cada pilha, é possível observar que se forma a sequência (1, 2, 4, 8, ...), uma PG, em que $a_1 = 1$ e $q = 2$.

a] Ao final de 9 operações, tem-se:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_9 = 1 \cdot 2^8 \Rightarrow a_9 = 256$

b] Como cada tábua tem 0,5 cm de espessura, a altura da pilha será:

$256 \cdot 0{,}5 = 128$

Portanto, a pilha terá 1,28 m de altura.

47. Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 2$ e $q = 2$, então, ao final de 12 dias, a quantidade de água perdida é dada por:

$S_{12} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{2(2^{12} - 1)}{2 - 1} = 2 \cdot 4\,095 = 8\,190 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{12} = 8\,190$ litros

48. a] Pelo enunciado, sabe-se que $a_1 = 5$ e $a_3 = 45$. Logo:

$a_3 = a_1 \cdot q^2 \Rightarrow 45 = 5 \cdot q^2 \Rightarrow q = \pm 3$

Como a razão é positiva, $q = 3$.

Sendo assim, a soma dos 6 primeiros termos será:

$S_6 = \frac{5 \cdot (3^6 - 1)}{3 - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{3\,640}{2} \Rightarrow S_6 = 1820$

b] Como 112 é múltiplo de 4, não deve ser considerado. Assim, a soma dos primeiros 111 números inteiros é:

$S_{111} = \frac{111(111 + 1)}{2} = 6\,216$

Agora, é necessário calcular a soma de todos os números múltiplos de 4 e menores do que 112. O maior número múltiplo de 4, dentro do intervalo, é 108 (112 = 108 + 4) e o menor é o próprio 4. Sendo assim, como $108 = 4 + 1 \cdot 27$, pode-se afirmar que há 74 múltiplos de 4. Portanto:

$S_{M(4)} = \frac{(108 + 4) \cdot 27}{2} = 1512$

Assim, a soma de todos os números inteiros positivos menores do que 112 e não divisíveis por 4 é:

$S = 6\,216 - 1\,512 = 4\,704$

c] O 23º termo dessa PA (a_{20}) pode ser calculado da seguinte maneira:

$a_{20} = S_{20} - S_{19}$

Portanto, utilizando a fórmula fornecida pelo enunciado, obtém-se:

$a_{20} = S_{20} - S_{19} \Rightarrow a_{20} = 20(2 \cdot 20 + 1) - 19(2 \cdot 19 + 1) \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{20} = 79$

49. Aplicando algumas técnicas de fatoração, obtém-se:

$S_n = \frac{a_1 \cdot (a_1 \cdot q^n - a_1)}{a_1 \cdot q - a_1} \Rightarrow S_n = \frac{\cancel{a_1}\left[a_1(q^n - 1)\right]}{\cancel{a_1}(q - 1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$

50. Observando a sequência de cada item, é possível identificar o termo a_1 e calcular a razão q.

a] $a_1 = 5; q = \frac{1}{5}$

Portanto, o termo geral é:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Considerando que a função possui domínio $\mathbb{N}^*$, então:

$$f(n) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \Rightarrow f(n) = 5 \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{1}{5}} = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

A soma de todos os termos é:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{5}{1-\frac{1}{5}} = \frac{25}{4}$$

b) $a_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$; $q = \frac{2^{-4}}{2^{-2}} = 2^{-2}$

Portanto, o termo geral é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

Considerando que a função possui domínio $\mathbb{N}^*$, então:

$$f(n) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \Rightarrow f(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

A soma de todos os termos é:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{2^{-2}}{1-2^{-2}} = \frac{1}{3}$$

c) $a_1 = 9^{-1}; q = \frac{10^{-1}}{9^{-1}} = \frac{9}{10}$

Portanto, o termo geral é:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_n = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}$$

Considerando que a função possui domínio $\mathbb{N}^*$, então:

$$f(n) = \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} \Rightarrow f(n) = \frac{1}{9} \cdot \frac{\left(\frac{9}{10}\right)^n}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{81} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

A soma de todos os termos é:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{9^{-1}}{1-\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$

51. De acordo com o enunciado, para o ano de 2021, deve-se considerar $n = 1$, para 2022 considera-se $n = 2$, e assim por diante, até que em 2030 o valor de n será 10.

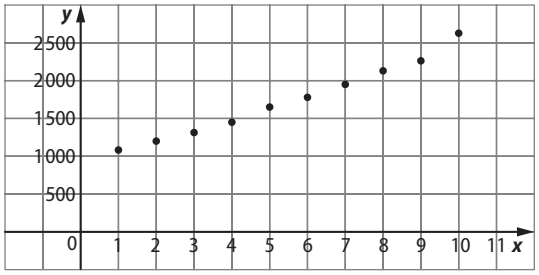
a) Considerando as informações do enunciado, pode-se considerar que, em 2021, $a_1 = 1\,100$ e a razão é 1,1, pois aumenta 10% ao ano. Assim, para saber a quantidade de peças vendidas em 2023, deve-se calcular a_3. Portanto:

$a_n = a_1 \cdot q^n \Rightarrow a_3 = 1\,000 \cdot (1{,}1)^{4-1} \Rightarrow a_3 = 1\,000 \cdot (1{,}331) \Rightarrow$
$\Rightarrow a_3 = 1\,331$

b) Utilizando uma calculadora, deve-se calcular $1\,000 \cdot (1{,}1)^n$, em que n varia de 1 a 10. Portanto, a sequência será (1 100, 1 210, 1 331, 1 464, 1 610, 1 771, 1 948, 2 143, 2 258, 2 594).

c) Considerando o termo geral $a_n = 1\,000 \cdot (1{,}1)^n$, pode-se afirmar que a função que represente essa situação é uma função f: A $\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(n) = 1\,000 \cdot (1{,}1)^n$, cujo domínio é $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ e a imagem $\text{Im}(f) = \{1\,100, 1\,210, 1\,331, 1\,464, 1\,610, 1\,771, 1\,948, 2\,143, 2\,258, 2\,594\}$.

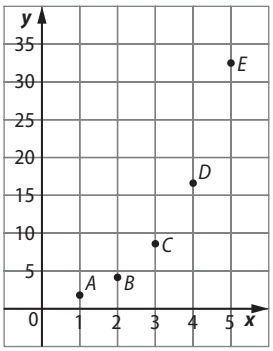
d)



52. a)

a_n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	16
5	32

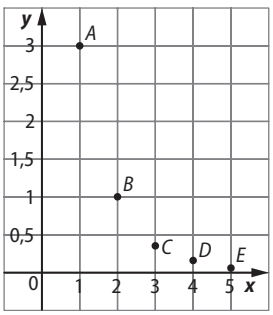
Ao plotar os pontos em um plano cartesiano, obtém-se o seguinte gráfico:



b)

a_n	$\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$
1	3
2	1
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{9}$
5	$\frac{1}{27}$

Ao plotar os pontos em um plano cartesiano, obtém-se o seguinte gráfico:



GRÁFICOS: EDITORIA DE ARTE

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

53. Para calcular a soma de uma PG, é necessário identificar o primeiro termo, a_1, e a razão q. Dessa forma:

a) $a_1 = 80x$; $q = \frac{40x}{80x} = \frac{1}{2}$

Pelo enunciado, sabe-se que a soma de todos os termos do primeiro membro da equação é 320, então:

$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow 320 = \frac{80x}{1-\frac{1}{2}} \Rightarrow 80x = 160 \Rightarrow x = 2$

$S = \{2\}$

b) $a_1 = 5^x$; $q = \frac{5^{x-1}}{5^x} = \frac{1}{5}$

Pelo enunciado, sabe-se que a soma de todos os termos do primeiro membro da equação é $\frac{625}{4}$, então:

$\frac{625}{4} = \frac{5^x}{1-\frac{1}{5}} \Rightarrow 125 = 5^x \Rightarrow x = 3$

$S = \{3\}$

54. **a)** Para calcular a soma de uma sequência infinita, é necessário identificar o primeiro termo, a_1, e a razão q. Sendo assim, pelo enunciado, tem-se $a_1 = 45$ e $q = \frac{15}{45} = \frac{1}{3}$.

Portanto, a soma de todos os termos é:

$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{45}{1-\frac{1}{3}} = \frac{45}{\frac{2}{3}} = 45 \cdot \frac{3}{2} = 67{,}5$

b) Para calcular $a_n < \frac{1}{30}$, deve-se considerar $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, logo:

$a_1 \cdot q^{n-1} < \frac{1}{30} \Rightarrow 45 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} < \frac{1}{30} \Rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{4\,050}$

Fatorando 4 050 e aplicando a propriedade da potenciação, obtém-se:

$\left(\frac{1}{3}\right)^n < (2 \cdot 3^4 \cdot 5^2)^{-1} \Rightarrow 3^{-n} < (2 \cdot 3^4 \cdot 5^2)^{-1}$

Como a base da potência é 3, aplicamos $\log_3$ em ambos os lados da equação. Assim:

$\log_3(2 \cdot 3^4 \cdot 5^2)^{-1} > -n \Rightarrow n > \frac{\log 2 + \log 3^4 + \log 5^2}{\log 3}$

Aplicando algumas propriedades dos logaritmos, obtém-se:

$n > \frac{\log 2 + 4 \cdot \log 3 + 2 \cdot (\log 10 - \log 2)}{\log 3}$

Substituindo os logaritmos pelas aproximações fornecidas no enunciado, obtém-se:

$n > \frac{0{,}30 + 4 \cdot 0{,}48 + 2 \cdot (1 - 0{,}30)}{0{,}48} \Rightarrow n > 7{,}54$

Portanto, para $a_n < \frac{1}{30}$, devemos ter $n = 8$.

55. Como a bola sobe e desce, deve-se calcular, separadamente, a distância percorrida somente na descida e, em seguida, calcular a distância percorrida somente na subida. A distância percorrida pela bola será a soma dessas duas distâncias. Portanto:

I. Soma das descidas

Primeiro deslocamento de descida: $a_1 = 30$ e $r = \frac{1}{3}$. Logo:

$d_1 = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow d_1 = \frac{30}{1-\frac{1}{3}} = 45$

II. Soma das subidas

Primeiro deslocamento de subida: $a_1 = 10$ e $r = \frac{1}{3}$. Logo:

$d_2 = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow d_2 = \frac{10}{1-\frac{1}{3}} = 15$

Distância total percorrida:

$d = d_1 + d_2 = 45 + 15 \Rightarrow d = 60$

A distância total percorrida pela bolinha será de 60 metros.

56. **a)** O gráfico **I** representa uma PG de razão 3 e $a_1 = 3$, portanto, a sequência é (3, 9, 27, 81).

Já o gráfico **II** representa uma PG de razão $\frac{1}{2}$ e $a_1 = \frac{1}{2}$.

Logo, a sequência é $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}\right)$.

b) Gráfico **I**: $q = 3$ e $a_1 = 3$. Assim: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

Gráfico **II**: $q = \frac{1}{2}$ e $a_1 = \frac{1}{2}$. Assim: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

57. Perímetro é a soma de todos os lados de um polígono e, no caso apresentado, será 4 vezes a medida do lado, já que a figura é um quadrado.

Para determinar a soma de todos os perímetros da sequência, é necessário o valor do primeiro termo e a razão da sequência. Sendo assim:

$a_1 = 4\ell$ e $a_2 = \frac{4\ell}{2}$, então: $q = \frac{\frac{4\ell}{2}}{4\ell} = \frac{1}{2}$

$S = \frac{a_1}{1-q} \Rightarrow S = \frac{4\ell}{1-\frac{1}{2}} = 8\ell$

Atividades complementares

1. Com base nas figuras, conclui-se que a quantidade de canudos utilizados segue a sequência (4, 7, 11, ...), em que $a_1 = 4$ e $r = 3$.

Portanto, o termo geral dessa sequência é

$a_n = a_1 + (n-1)r \Rightarrow a_n = 4 + 3n - 3 \Rightarrow a_n = 3n + 1$

Considerando $a_n = C$ e $n = Q$, obtém-se:

$a_n = 3n + 1 \Rightarrow C = 3Q + 1$

Resposta: alternativa **b**

2. Com base nas figuras, é possível notar que a quantidade de quadrados centrais aumenta de acordo com a regra n^2, em que n representa o número da etapa. Além disso, há uma quantidade fixa de 4 quadrados que não varia de etapa para etapa. Assim, pode-se concluir que a lei que rege a quantidade de quadrados pode ser escrita por $a_n = n^2 + 4$.

Portanto, o número de quadrados na etapa 10 será:

$a_{10} = 10^2 + 4 = 104$

Resposta: alternativa **c**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

3. Considerando as propriedades de uma PA, pode-se afirmar que $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$, logo:

$x + 14 = \frac{5x - 5 + 6x - 3}{2} \Rightarrow 2x + 28 = 11x - 8 \Rightarrow x = 4$

Portanto, a soma dos 3 termos será:

$S = 5x - 5 + x + 14 + 6x - 3 = 12x + 6 = 12 \cdot 4 + 6 = 54$

Resposta: alternativa **b**

4. Como a PA é formada a partir do segundo dia, pode-se entender que a sequência de peças montadas diariamente é (40, a_1, a_2, ..., a_{10}). Como há 1 000 peças no total, conclui-se que a quantidade de peças relacionadas à PA é 960 (1 000 − 40).

Como o segundo dia (a_1) corresponde a 60% do número de peças montadas no sétimo dia (a_6), então:

$a_1 = 0{,}6(a_6) \Rightarrow a_1 = 0{,}6(a_1 + 5r) \Rightarrow 0{,}4a_1 = 3r \Rightarrow a_1 = 7{,}5r$

Pode-se também afirmar que:

$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_{10} = 7{,}5r + 9r \Rightarrow a_{10} = 16{,}5r$

Como a soma de todos os termos é calculada por $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$, conclui-se que:

$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 960 = \frac{(7{,}5r + 16{,}5r)10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 24r = 192 \Rightarrow r = 8$

Como o nono dia representa o termo a_8 da PA, tem-se:

$a_8 = a_1 + 7r \Rightarrow a_8 = 7{,}5r + 7r = 14{,}5 \cdot 8 = 116$

Resposta: alternativa **c**

5. Os andares trabalhados por João foram (1, 3, 5, 7, ...) e os andares trabalhados por Pedro foram (1, 4, 7, 10, ...), portanto, os andares que foram reparados pelos dois ao mesmo tempo foram (1, 7, 13, ..., a_{20}).

Assim, essa sequência possui $a_1 = 1$ e $r = 6$. Logo, o termo geral será:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow a_n = 6n - 5$

Sendo assim, conclui-se que:

$a_{20} = 6 \cdot 20 - 5 = 115$

Resposta: alternativa **d**

6. Pelo enunciado, pode-se afirmar que $r = 160$ e $a_1 = \frac{a_{10}}{7}$, portanto, $a_{10} = 7a_1$. Porém, sabe-se que:

$a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow 7a_1 = a_1 + 9 \cdot 160 \Rightarrow a_1 = 240$

Portanto:

$a_7 = a_1 + 6 \cdot 160 \Rightarrow a_7 = 240 + 960 = 1\,200$

Sendo assim, no sétimo dia o paciente percorreu 1200 m, isto é, 1,2 km.

Resposta: alternativa **a**

7. Considerando as informações do enunciado, pode-se organizar a sequência (1, 5, 9, 13, ...) em que cada termo representa a quantidade de vírus por minuto.

Essa sequência é uma PA de $a_1 = 1$ e $r = 4$.

O termo que representa 1 hora é a_{60}, logo:

$a_{60} = a_1 + 59 \cdot r$

$a_{60} = 1 + 59 \cdot 4 = 237$

Resposta: alternativa **c**

8. Pelo enunciado, é possível afirmar que $a_1 = 35\,050$ e $r = 300$. Logo:

$a_{13} = 35\,050 + (13 - 1) \cdot 300$

$a_{13} = 35\,050 + 3\,600 = 38\,650$

Portanto, a distância do 13º *outdoor* e o km 41 é:

$d = 41\,000 - 38\,650 \Rightarrow d = 2\,350$ m

Resposta: alternativa **d**

9. A partir do enunciado, podem-se destacar as seguintes informações: $a_1 = 80$, pois é o lugar do primeiro poste; $r = 20$, pois os postes são colocados de 20 em 20 metros; $a_n = 1\,380$, pois é a posição do último poste; o valor pago por poste colocado é R$ 8.000,00.

Considerando o termo geral de uma PA, obtém-se:

$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow 1\,380 = 80 + (n - 1) \cdot 20 \Rightarrow$

$\Rightarrow 20n = 1\,320 \Rightarrow n = 66$

Como a prefeitura paga R$ 8.000,00 por poste instalado, o valor total da obra será de R$ 528.000,00 (66 · 8 000).

Resposta: alternativa **c**

10. A partir do enunciado, podem-se destacar as seguintes informações: $a_1 = 1\,000$, pois é o valor da primeira parcela; $n = 10$, pois é o número total de parcelas; $S_n = 21\,250$, pois é o valor total que foi emprestado.

Considerando a soma total de uma PA, obtém-se:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 21250 = \frac{(1000 + a_{10})10}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{10} = 3250$

Como $a_{10} = a_1 + 9r$, pode-se concluir que:

$3\,250 = 1\,000 + 9r \Rightarrow r = 250$

Portanto, como $a_{10} = 3\,250$ e $r = 250$, conclui-se que $a_9 = 3\,000$ e $a_8 = 2\,750$. Então, a soma das três últimas parcelas será R$ 9.000,00 (3 250 + 3 000 + 2 750).

Resposta: alternativa **e**

11. A partir do enunciado, podem-se destacar as seguintes informações: $a_1 = 1\,000$, pois é o valor da primeira parcela; $r = -20$, pois o valor da parcela diminui R$ 20,00 por mês; $n = 24$, pois é o prazo total do financiamento (2 anos).

Assim, o valor da última parcela, a_{24}, será:

$a_{24} = a_1 + 23r \Rightarrow a_{24} = 1\,000 + 23 \cdot (-20) \Rightarrow a_{24} = 540$

Considerando a soma total de uma PA com 24 termos, obtém-se:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{24} = \frac{(1000 + 540)24}{2} \Rightarrow S_{24} = 18\,480$

Resposta: alternativa **a**

12. Como todas as páginas de um livro são numeradas uma a uma, pode-se afirmar que as páginas do livro formam uma PA em que o primeiro termo é 1, o último termo é 20 e a razão é 1.

Assim, considerando a soma total de uma PA, pode-se afirmar que, sem retirar nenhuma página, a soma total é:

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{20} = \frac{(1 + 20)20}{2} \Rightarrow S_{20} = 210$

Ao retirar uma página, deixaram de ser contabilizadas duas numerações sucessivas (x e $x + 1$), cuja soma é 39 (210 − 171). Logo:

$x + x + 1 = 39 \Rightarrow 2x = 38 \Rightarrow x = 19$

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Portanto, a numeração ausente da soma são 19 e 20.
Considerando que uma página é formada por uma dupla que se inicia com 1 e 2, a página que compõe a numeração 19 e 20 será a décima.
Resposta: alternativa **04**

13. Considerando que na primeira fila haverá um estudante, na segunda fila, dois estudantes, e assim por diante, pode-se considerar que na última fila, a_n, haverá n estudantes.
Como o primeiro termo é 1 e a soma de todos os estudantes é 231, pode-se afirmar que:
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow 231 = \frac{(1+n)n}{2} \Rightarrow n^2 + n - 462 = 0$
Resolvendo a equação obtêm-se as raízes $n' = -22$ e $n'' = 21$. Como n é um valor positivo, então haverá 21 fileiras.
Resposta: alternativa **b**

14. Como entre 1 e 100 há exatamente 50 números ímpares, segundo o enunciado, a soma de todos os números ímpares entre 1 e 100 será 50^2.
Resposta: alternativa **c**

15. A partir do enunciado, pode-se considerar que a quantidade adquirida mensalmente de ações forma uma PA, cujo primeiro termo é 100 e a razão é 2. Assim, no último mês, a quantidade de ações compradas por Roberto foi de:
$a_{60} = a_1 + (60 - 1)2 \Rightarrow a_{60} = 218$
Portanto, depois de 60 meses, o total de ações adquiridas por Roberto será de:
$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} \Rightarrow S_{60} = \frac{(100 + 218)60}{2} \Rightarrow S_{60} = 9540$
Resposta: alternativa **d**.

16. Se o primeiro termo é negativo e a razão é maior do que 1, a PG é decrescente. Resposta: alternativa **a**.

17. Do enunciado, é possível obter as seguintes informações:

Mês	Nº de televisores
1º	x
2º	$2 \cdot x$
3º	$2^2 \cdot x$
...	...
11º	$2^{10} \cdot x$

A soma dos termos da PG é igual ao número de televisores. Sendo assim, é possível concluir que $a_1 = x$, $q = 2$ e $S_{11} = 204\,700$, logo:
$S_{11} = \frac{a_1(q^{11} - 1)}{q - 1} \Rightarrow 204\,700 = \frac{x(2^{11} - 1)}{2 - 1} \Rightarrow x = 100$
Assim, a quantidade no primeiro mês é 100 unidades.
Resposta: alternativa **a**

18. Com base no enunciado, é possível construir um sistema:
$\begin{cases} a_1 + a_3 + a_5 = 5 \\ a_2 + a_4 + a_6 = 10 \end{cases}$
Aplicando a definição das progressões geométricas, obtêm-se:
$\begin{cases} a_1 \cdot (1 + q^2 + q^4) = 5 \text{ (I)} \\ a_1 q(1 + q^2 + q^4) = 10 \text{ (II)} \end{cases}$
Dividindo a equação (II) pela equação (I), obtém-se:
$q = \frac{10}{5} = 2$
Resposta: alternativa **d**

19. A partir do enunciado, pode-se afirmar que o primeiro termo da PG é $\frac{1}{125}$. A razão pode ser calculada como:
$q = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{1}{125}} = \frac{125}{25} = 5$
O último termo é 3 125, então, pode-se afirmar que:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 3\,125 = 5^{-3} \cdot 5^{n-1} \Rightarrow 5^5 = 5^{n-4} \Rightarrow n = 9$
Resposta: alternativa **e**

20. A partir do enunciado, pode-se afirmar que o primeiro termo da PG é -7. A razão pode ser calculada como:
$q = \frac{21}{-7} = -3$
Assim, o sexto termo é:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow a_6 = -7 \cdot (-3)^{6-1} \Rightarrow a_6 = 1\,701$
Resposta: alternativa **b**

21. Do enunciado, tem-se:

Dia	Acessos
1º	3
2º	9
3º	27
...	...
n	2187

A partir desses valores, obtém-se a PG (3, 9, 27, ..., 2 187), em que $a_1 = 3$ e $q = 3$. Assim, para encontrar o dia em que o *site* teve 2 187 acessos, utiliza-se o termo geral, ou seja:
$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \Rightarrow 2\,187 = 3 \cdot 3^{n-1} \Rightarrow 729 = 3^{n-1} \Rightarrow n = 7$
Portanto, no dia 7 ocorreram 2 187 acessos.
Resposta: alternativa **b**

22. Segundo o enunciado, pode-se interpretar que o valor do perímetro de cada triângulo, organizado em uma sequência, representará uma PG em que $a_1 = 24$ e $q = \frac{1}{2}$.
Portanto, a soma será:
$S = \frac{a_1}{1 - q} \Rightarrow S = \frac{24}{1 - \frac{1}{2}} = 48$
Resposta: alternativa **c**

23. Sabe-se que $a_5 = a_1 \cdot q^4$ e que $a_5 = 9 \cdot a_1$; então:
$a_1 \cdot q^4 = 9 \cdot a_1 \Rightarrow q^4 = 9 \Rightarrow q = \pm\sqrt{3}$
Porém, $q = \sqrt{3}$ não é conveniente, pois $a_6 = -9\sqrt{3}$.

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

Portanto, $q = -\sqrt{3}$. Como $a_6 = a_2 \cdot q^4$, tem-se:
$-9\sqrt{3} = a_2 \cdot \left(-\sqrt{3}\right)^4 \Rightarrow -9\sqrt{3} = a_2 \cdot 9 \Rightarrow a_2 = -\sqrt{3}$
Portanto, o produto $a_2 \cdot a_7$ será:
$a_2 \cdot a_7 = a_2 \cdot a_6 \cdot q = \left(-\sqrt{3}\right) \cdot \left(-9\sqrt{3}\right) \cdot \left(-\sqrt{3}\right) = -27\sqrt{3}$
Resposta: alternativa **a**

24. A partir do enunciado, é possível estabelecer uma sequência que represente a quantidade de folhas em cada etapa, ou seja, (1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, ..., 33ª operação).
Assim, descartando a primeira operação, obtém-se uma PG cuja sequência é (1, 2, 4, 8, 16, ..., a_{32}).
Portanto, a soma de todas essas pilhas será:
$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_{32} = \frac{1 \cdot \left(2^{32} - 1\right)}{2 - 1} \Rightarrow S_{32} = 2^{32}$
Portanto, como 0,1 mm $= 10^{-4}$ m, pode-se afirmar que $2^{32} \cdot 10^{-4}$ metros.
Como $2^{10} \simeq 10^3$, então:
$2^{32} \cdot 10^{-4} = 2^2 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} \cdot 10^{-4} \simeq$
$\simeq 2^2 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^3 \cdot 10^{-4} \simeq 2^2 \cdot 10^5 \simeq 400 \cdot 10^3$
Ou seja, aproximadamente 400 km.
Resposta: alternativa **d**

25. Elaborando uma sequência com os 10 termos, a partir das orientações do fluxograma, obtêm-se $-2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2, -\frac{1}{2}, -2$ e $-\frac{1}{2}$.
Adicionando todos os valores da sequência, obtém-se $-12{,}5$.
Resposta: alternativa **e**

26. Calculando os valores dos primeiros termos de S, obtêm-se:
$f(0) = 2^{-0} = 1 \qquad f(1) = 2^{-1} = \frac{1}{2} \qquad f(2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$
Portanto, pode-se compreender que S é a soma entre $f(0)$ e os 100 primeiros termos de uma PG em que $a_1 = \frac{1}{2}$ e $q = \frac{1}{2}$. Logo:
$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_{100} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(2^{-100} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_{100} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \left(2^{-100} - 1\right)}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow S_{100} = 1 - 2^{-100}$
Como $S = f(0) + S_{100}$, tem-se:
$S = 1 + 1 - 2^{-100} \Rightarrow S = 2 - 2^{-100}$
Resposta: alternativa **e**

27. De acordo com o enunciado, pode-se considerar que $a_1 = 40\,000$, pois esse é o primeiro faturamento, e $a_7 = 45\,000$, referentes ao faturamento do mês de julho.
Aplicando a definição de PG:
$a_7 = a_1 \cdot q^6 \Rightarrow 45\,000 = 40\,000 \cdot q^6 \Rightarrow q = \sqrt[6]{\frac{9}{8}}$
Portanto, o faturamento do primeiro semestre foi:
$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_6 = \frac{40\,000 \cdot \left[\left(\sqrt[6]{\frac{9}{8}}\right)^6 - 1\right]}{\sqrt[6]{\frac{9}{8}} - 1}$
Aplicando as propriedades da radiciação, obtém-se:
$S_6 = \frac{5\,000\sqrt{2}}{\sqrt[3]{3} - \sqrt{2}}$
Resposta: alternativa **04**

28. O número total de rebites utilizados é o resultado da soma de uma PG de 5 termos, com $a_1 = 4$ e $q = 4$. Logo:
$S_n = \frac{a_1\left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_5 = \frac{4 \cdot \left[4^5 - 1\right]}{4 - 1} \Rightarrow$
$\Rightarrow S_5 = \frac{4 \cdot 1023}{3} \Rightarrow S_5 = 1364$
Sendo x o número de caixas, deve-se ter: $100x \geqslant 1\,364 \Rightarrow$
$\Rightarrow x \geqslant 13{,}64$
Como $x \in \mathbb{N}^*$, o x mínimo é igual a 14.
Resposta: alternativa **c**

29. A partir dos dados fornecidos pelo enunciado, pode-se afirmar que $a_1 = 10\,000$ e $q = 2$. Logo, para calcular a quantidade de u.a. depois de 10 dias, deve-se calcular S_{10}, ou seja:
$S_{10} = \frac{10\,000\left(2^{10} - 1\right)}{2 - 1} \Rightarrow S_{10} = 10\,000 \cdot 1023 \Rightarrow S_{10} = 10\,230\,000$
A soma dos 10 primeiros termos será igual a 10 230 000 u.a.
Resposta: alternativa **c**

30. Considerando $a_n = -250$, em relação à sequência da PA, tem-se $a_1 = -2$ e $r = -4$. Assim, pode-se afirmar que:
$a_n = a_1 + (n - 1)r \Rightarrow -250 = -2 + (n - 1)(-4) \Rightarrow n = 63$
Em relação à sequência da PG, tem-se $a_1 = 3$ e $r = 2$. Então:
$S_n = \frac{a_1 \cdot \left(q^n - 1\right)}{q - 1} \Rightarrow S_n = \frac{3 \cdot \left(2^9 - 1\right)}{2 - 1} \Rightarrow S_n = 1533$
Portanto, $s - n = 1\,533 - 63 = 1\,470$
Resposta: alternativa **02**

31. Para calcular a razão de uma PG, é necessário ter, pelo menos, dois termos sucessivos. Porém, é seguro utilizar três termos sucessivos, como a_1, a_2 e a_3, e verificar se $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$.
Utilizando as construções geométricas como referência, obtêm-se:
$a_1 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}$
$a_2 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\frac{\ell^2}{4}\sqrt{3}}{4} = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16} = \frac{3\ell^2\sqrt{3}}{16}$
$a_3 = \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16} - 3 \cdot \frac{\frac{\ell^2}{16}\sqrt{3}}{4} =$
$= \frac{\ell^2\sqrt{3}}{4} - \frac{\ell^2\sqrt{3}}{16} - 3 \cdot \frac{\ell^2\sqrt{3}}{64} \Rightarrow a_3 = \frac{9\ell^2\sqrt{3}}{64}$
$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\frac{9\ell^2\sqrt{3}}{64}}{\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{16}} = \frac{3}{4}$ e $\frac{a_2}{a_1} = \frac{\frac{3\ell^2\sqrt{3}}{16}}{\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}} = \frac{3}{4}$
Logo, a sequência é uma PG de razão $\frac{3}{4}$.
Resposta: alternativa **a**

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

HINO NACIONAL

Letra: Joaquim Osório Duque Estrada

Música: Francisco Manuel da Silva

Ouviram do Ipiranga as margens plácidas
De um povo heroico o brado retumbante,
E o sol da liberdade, em raios fúlgidos,
Brilhou no céu da Pátria nesse instante.

Se o penhor dessa igualdade
Conseguimos conquistar com braço forte,
Em teu seio, ó liberdade,
Desafia o nosso peito a própria morte!

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, um sonho intenso, um raio vívido
De amor e de esperança à terra desce,
Se em teu formoso céu, risonho e límpido,
A imagem do Cruzeiro resplandece.

Gigante pela própria natureza,
És belo, és forte, impávido colosso,
E o teu futuro espelha essa grandeza.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

Deitado eternamente em berço esplêndido,
Ao som do mar e à luz do céu profundo,
Fulguras, ó Brasil, florão da América,
Iluminado ao sol do Novo Mundo!

Do que a terra mais garrida
Teus risonhos, lindos campos têm mais flores;
"Nossos bosques têm mais vida",
"Nossa vida" no teu seio "mais amores".

Ó Pátria amada,
Idolatrada,
Salve! Salve!

Brasil, de amor eterno seja símbolo
O lábaro que ostentas estrelado,
E diga o verde-louro desta flâmula
- Paz no futuro e glória no passado.

Mas, se ergues da justiça a clava forte,
Verás que um filho teu não foge à luta,
Nem teme, quem te adora, a própria morte.

Terra adorada,
Entre outras mil,
És tu, Brasil,
Ó Pátria amada!

Dos filhos deste solo és mãe gentil,
Pátria amada,
Brasil!

MATERIAL PARA DIVULGAÇÃO DA EDITORA FTD
REPRODUÇÃO PROIBIDA

ISBN 978-65-5742-019-5
9 786557 420195